

**UNIVERSITE FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY DE COCODY-ABIDJAN**

-----

**UFR Mathématique et Informatique**

**DEA : Mécanique et Energétique**

**Année : 2008-2009**

**COURS DE MECANIQUE  
DES MATERIAUX SOLIDES**

Matériaux – Elasticité- Plasticité- Applications

**Dr Arnaud ZAGBAI TAPE**

## **PREAMBULE**

La mécanique est la science des mouvements de la matière à toute échelle de temps et pour toute échelle d'espace. Pour les solides, ces mouvements conduisent à des changements de forme.

Un matériau est de la matière que l'on sait utiliser ou transformer pour lui donner une fonction. La mécanique des matériaux solides a pour but de maîtriser les changements de forme des matériaux à toutes les échelles de temps et d'espace, dans les cas où l'on souhaite que leur forme évolue peu ou dans le cas d'évolutions de forme désirées.

Prendre forme c'est occuper un domaine géométrique de l'espace avec des transformations décrites par des champs de déplacement. Nous nous limitons ici aux échelles d'espace pour lesquelles le milieu occupé par la matière peut être considéré comme continu, c'est-à-dire, de façon simple, des milieux pour lesquels les déplacements de matières sont des fonctions continues des variables d'espace (variables de position) ou des fonctions continues presque partout sur le domaine occupé par la matière.

La rupture est le chargement de forme ultime pour les solides. Lorsqu'une fissure se propage, de nouvelles surfaces se créent au bord de la matière. Mais bien avant de rompre, certains matériaux peuvent supporter des contraintes induisant un changement de forme par déformation élastique, c'est dire réversible ou par déformation en partie irréversible.

Les éléments du cours ont ici pour objectif pédagogique de donner des éléments de connaissance théorique en mécanique des matériaux solides. Ces éléments sont complétés par des exercices corrigés qui aideront l'étudiant à mieux comprendre les principes théoriques exposés. Ils visent également à donner un éclairage sur la mécanique des matériaux solides et les méthodes utilisés.

La mécanique de matériaux est un carrefour où se croisent mathématiciens, ingénieurs, industriels, théoriciens et expérimentateurs.

# CHAPITRE I : MATERIAUX

## I.1 Grandes classes de matériaux et leurs propriétés

### I.1.1 Définition d'un matériau

Le physico-chimiste étudie les propriétés de la matière, des métaux purs et des alliages, des carbures, des nitrures, des verres, des céramiques, des polymères, mais ne s'occupe rarement que des matériaux correspondants. Les matériaux sont de la matière travaillée par l'homme pour fabriquer des objets. Pour beaucoup de laboratoires, le processus d'élaboration procure au matériau une certaine microstructure qui à son tour détermine ses propriétés chimiques, physiques, mécaniques, électriques, thermiques. Il s'agit là des propriétés intrinsèques du matériau. Mais en se limitant à ce triangle, on oublie une dimension essentielle : leurs performances, c'est-à-dire, en fonction des applications auxquelles ils sont destinés, leur efficacité, leur usinabilité, leur fiabilité, leur durabilité, leur absence de nocivité, leur capacité à être recyclé, leur coût, leur aspect, etc.

#### *Eléments de la microstructure*

- type de liaison, molécules, type et taille,
- système de cristallins,
- ordre à courte et grande distance, taux de réticulation,
- taux de réticulation des polymères, taux de cristallinité des polymères,
- hétérogénéités chimiques,
- décomposition spinodale,
- précipités : cohérents – incohérents – dimension et forme,
- aiguille, lattes, lamelles, sous-grains, grains – taille et forme-
- nodules, texture, inclusions,
- fibres courtes, longues, trichytes
- agrégats : nature –forme - taille
- plis (composites), porosités

.....

Il est de coutume de dire que chaque secteur industriel a les performances de ses matériaux. Cela est particulièrement marquant dans le cas de l'informatique, pour laquelle les progrès sont directement liés à la densité des circuits, c'est aussi le cas dans l'aéronautique, où les performances des réacteurs dépendent de la température maximale que supportent les matériaux dans les zones les plus chaudes. Mais en fait, il serait plus précis de dire que les performances obtenues dépendent aussi des *connaissances* sur le matériau utilisé. Ainsi, dans le plan d'exploitation d'une mine souterraine en chambres et piliers, où il n'est bien entendu pas envisageable de choisir son matériau, il est possible de diminuer la taille des piliers si les propriétés de la roche sont bien connues.

Le fait de concevoir ainsi "au plus juste" les structures, est la marque d'une démarche qui présente deux aspects importants :

- il y a une amélioration de la sécurité, dans la mesure où il est préférable d'avoir une bonne connaissance des phénomènes physiques que d'appliquer un large coefficient de sécurité, par ailleurs, dans certains cas, l'utilisation de plus grandes quantités de matière peut devenir préjudiciable (ainsi, augmenter l'épaisseur d'une

enceinte sous pression peut certes diminuer les contraintes, mais aussi être néfaste s'il y a des gradients thermiques dans la paroi).

– le résultat est une meilleure performance sur le plan écologique, ainsi la diminution de poids permet de réduire dans le cas des automobiles ou des avions, la consommation en carburant.

### ***1.1.2 Propriétés des matériaux***

Les principales propriétés des matériaux se regroupent donc en :

– *Propriétés mécaniques* :

- modules d'élasticité ;
- limite d'élasticité, écrouissage, ductilité, contrainte d'écoulement ;
- viscosité, vitesse de fluage, amortissement ;
- charge à la rupture, résistance à la fatigue, à l'usure ;

- . . .

– *Propriétés physiques* :

- conductibilité électrique, aimantation,
- conductibilité thermique, chaleur spécifique,
- masse spécifique
- température et chaleur latente de transformation,
- énergie de surface, de liaison,
- transparence, coefficient de dilatation, biréfringence ;
- réflectivité, émissivité, indice de réfraction

- . . .

– *Propriétés chimiques* :

- résistance à la corrosion, à l'oxydation,
- stabilité, réactivité, diagrammes d'équilibre,

- . . .

### ***1.1.3 Choix d'un matériau dans une application***

En général, le choix d'un matériau pour une application donnée est la conséquence de propriétés adaptées dans un ou plusieurs des domaines indiqués (par exemple l'aluminium est parfois utilisé dans les culasses automobiles malgré sa faible température de fusion, en raison de son faible poids et de sa bonne conductibilité thermique). Il est aussi orienté par d'autres considérations, ce sont les *performances* du matériau, au rang desquelles vont se classer des éléments technologiques et économiques, en même temps que des caractéristiques moins facilement mesurables comme l'aspect (fondamental dans le bâtiment pour les éléments de façade, pour les carrosseries automobiles, ...) :

- disponibilité, reproductibilité, fiabilité ;
- usinabilité, aptitude à la mise en forme, soudabilité ;
- absence de nocivité, possibilité de recyclage ;
- coût ;
- aspect ;
- bonne caractérisation.

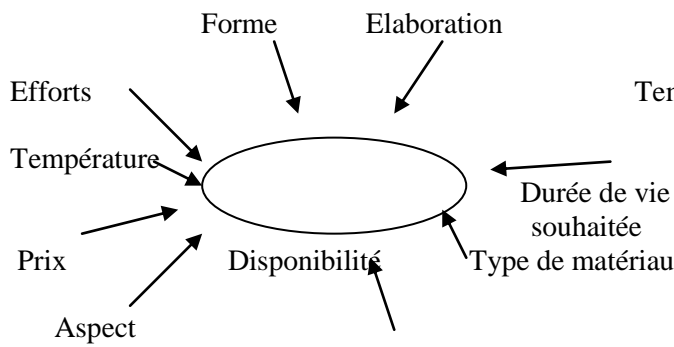


Fig. 1a : Conception

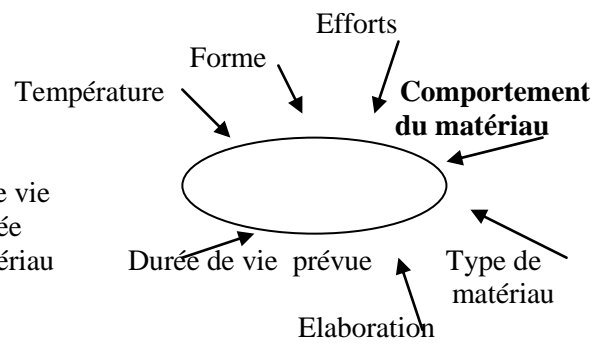


Fig.1b : Justification

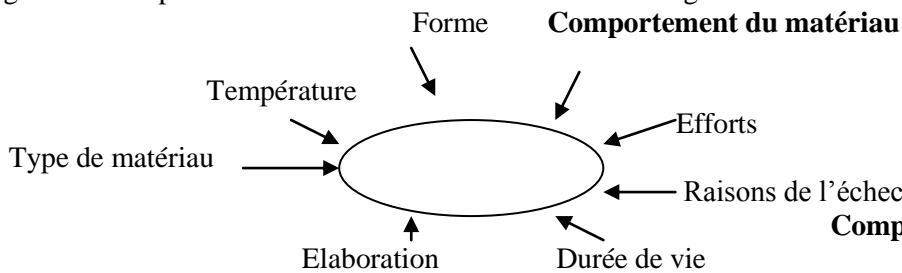


Fig. 1c : Expertise

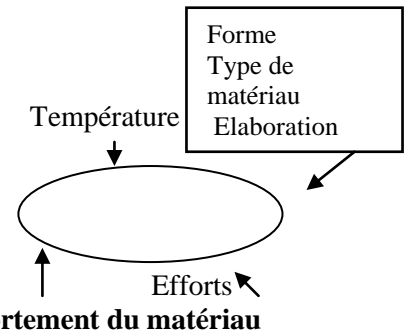


Fig. 1d : Optimisation

Fig. 1.1 – Opérations industrielles où intervient le comportement des matériaux

La phase de *conception* (fig.1a) met en oeuvre une approche synthétique du problème, qui est en fait résolu par la "méthode inverse", soit : "quelle forme donner à la pièce, en quel matériau la construire pour qu'elle réponde au cahier des charges". Dans la mesure où les éléments extérieurs sont nombreux, et parfois non scientifiques, il n'y a en général pas d'autre solution que de choisir des descriptions simples des matériaux, et d'appliquer des "codes" ou règles simplifiées. Dans la plupart des cas, cette approche est suffisante.

Il peut subsister parfois des cas litigieux (pièces de haute sécurité, ...) qui nécessitent la mise en place d'une procédure de *justification* (fig.1b). Au contraire de la précédente, la démarche est analytique, puisque la géométrie, les charges, le matériau, etc. sont figés, et qu'il s'agit simplement, par un calcul direct, de caractériser la bonne tenue. Cette procédure peut être employée à la construction, ou encore longtemps après la mise en route d'une installation, afin d'obtenir une *requalification* qui prolonge la durée de vie : un système (par exemple une centrale nucléaire) dont la durée de vie garantie est de 30 ans, en utilisant des méthodes de dimensionnement simplifiées, peut voir sa vie prolongée d'une dizaine d'années à l'aide de méthodes plus précises.

Il faut encore avoir recours à des modèles plus précis dans le cas de l'*expertise* (fig.1c) puisqu'une telle opération intervient après qu'un problème, grave ou non, soit apparu. Le point important ici est d'être capable de mettre en regard les modèles utilisés et les phénomènes physiques qui se sont produits.

L'*optimisation* (fig. 1d) va tendre à se généraliser, grâce à l'arrivée des calculateurs suffisamment puissants pour qu'il soit envisageable d'effectuer plusieurs dizaines de fois le calcul de la structure à étudier.

## I.2 Grandes classes des matériaux

L'ingénieur groupe les matériaux en trois classes suivantes correspondant à trois types de comportement.

<i>Matériaux</i>	<i>Comportement</i>	<i>Propriétés</i>
Verres et céramiques	Dureté et fragilité	Isolants et réfractaires
Métaux et Alliages	Ductilité	Conducteurs et Réflecteurs
Polymères	Déformabilité	

Tableau 1.1 : Les trois classes de matériaux

Cette classification recoupe celles des matériaux en fonction de leur type de liaison chimique.

<b>Liaison covalente</b>	
Bore	Fibres
Carbone, diamant	Poudres abrasives- fibres
Silicium, Germanium	Composants électroniques
Carbures- nitrures	Meules, paliers, fibres réfractaires
Polymères	Thermodurcissables

<b>Liaison ionique</b>	
Alumine, silice, zircon	Abrasifs, réfractaires
Verres	Vitres, emballages, fibres

<b>Liaison métallique</b>	
Aluminium	Alliages légers
Zinc	Bâtiment, fonderie
Titane	Aéronautique
Zirconium	Industrie chimique, gaines combustibles nucléaires,
Cuivre	Laitons, bronzes
Or, Argent	Monnaies, brasures, photographie, contacts
Etain, Plomb	Plomberie, soudure
Tantale	Réfractaire, électronique
Fer, Cobalt, Nickel	Aciers, fontes, superalliages

<b>Chaînes covalentes avec liaisons Van der Waals ou Hydrogène</b>	
Polymères	Thermoplastiques
Elastomères	
Bois, Papiers, Cartons	
Ciments, Bétons	

Tableau 1.2 : Matériaux et types de liaisons chimiques

A ces trois classes s'ajoute la classe des composites qui permet une grande souplesse de combinaisons de propriétés.

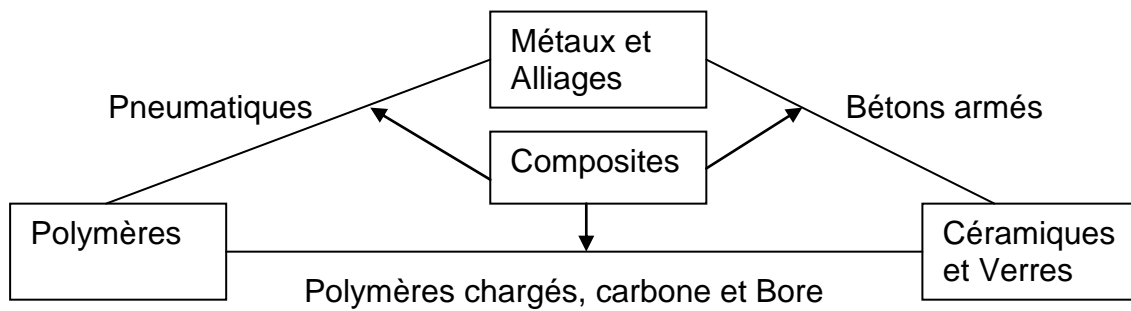


Fig. 1.2 : La classe des matériaux composites

### I.3 Liaison chimique et propriétés mécaniques

Pour résister aux efforts qui lui sont appliqués, un matériau se déforme de sorte à stocker ou à dissiper l'énergie qui lui est fournie. Dans les matériaux cristallins la déformation est associée à de légères variations des distances interatomiques, mais elles entraînent des variations considérables de l'énergie de cohésion. Ainsi, pour comprendre les caractéristiques mécaniques des matériaux comme leur module, il faut descendre à l'échelle atomique.

Les propriétés des matériaux sont fortement corrélées au type de liaison entre les atomes, car il détermine l'énergie de cohésion de la matière, la force nécessaire pour écarter les atomes les uns des autres jusqu'à rupture, le coefficient de dilatation. Il existe pour le chimiste deux types de liaisons : les liaisons fortes (ioniques, covalentes et métalliques) se désagrégant entre 1000 et 5000 °K et les liaisons faibles ou secondaires (Van der Waals et hydrogène) fondant entre 100 et 500 °K.

L'énergie de liaison  $U$  est une fonction de la distance  $r$  entre les atomes. Elle est la somme de deux termes : un terme répulsif  $U_r = B/r^n$  ( $n$  compris entre 6 et 12) et un terme attractif  $U_a = -A/r^m$  ( $m < n$ ) :

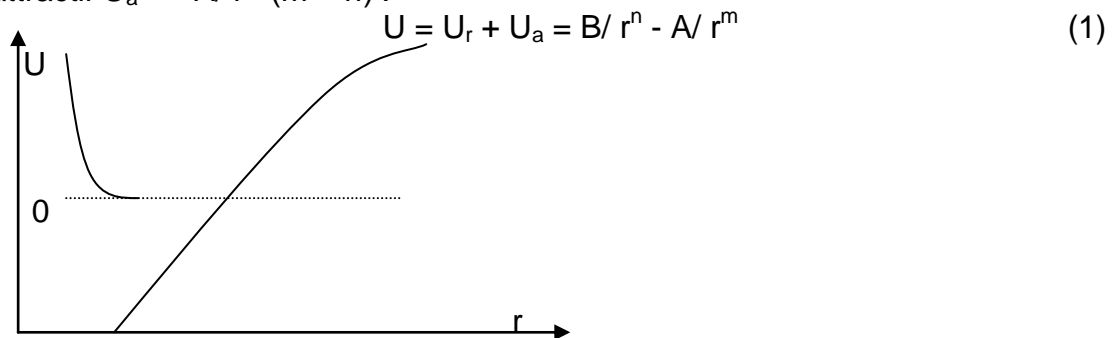


Fig. 1.3. : Energie de liaison  $U$  (Potentiel de Lennard-Jones)

**La liaison ionique** est une liaison forte dont le terme "attractif" est d'origine Coulombienne :  $U_a = -q^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ . Elle assure la cohésion des halogénures d'alcalins comme NaCl. **La liaison covalente** est une liaison forte très stable dont le terme attractif provient de la mise en commun d'orbitales électroniques. On la rencontre dans le diamant, le silicium et le germanium. **La liaison métallique** est une liaison forte délocalisée. C'est la liaison principale des métaux et de leurs alliages.

Dans un métal, les électrons d'énergie élevée ont tendance à quitter leurs atomes d'origine pour former un gaz d'électrons plus ou moins libres, ce qui explique la conductivité électrique élevée des métaux. **Les liaisons de type Van der Waals**

sont des liaisons faibles dont le terme "attractif" entre atomes électriquement neutres est d'origine dipolaire et varie en  $r^{-6}$ .

C'est par la formation des liaisons fortes et faibles que la matière se condense pour passer de l'état gazeux à l'état liquide ou solide. Les liaisons faibles des liquides ordinaires ont fondu ; pour cette raison ils opposent une forte résistance à la compression mais faible à la traction ou au cisaillement. Leur module de compressibilité  $K$  est grand devant celui des gaz, mais leur module de cisaillement  $G$  et leur module d'Young  $E$  sont nuls. De manière générale les modules dépendent de l'état des liaisons et de la structure de la matière.

Etat	Liaisons		Modules	
	Faibles	Fortes	K	G et E
Liquides	rompues	-	grand	nuls ( $E=G=0$ )
Cristaux liquides	rompues	-	grand	quasi nuls ( $E \approx G \approx 0$ )
Caoutchouc	établies	établies	grand	petits ( $E \approx G \ll K$ )
Verres		établies	grand	grands ( $E \approx G \approx K$ )
Cristaux		établies	grand	grands ( $E \approx G \approx K$ )

Tableau 1.3 : Liaisons chimiques et états de la matière

La façon dont les atomes sont empilés est une donnée importante pour déterminer les propriétés mécaniques des matériaux. De nombreux matériaux (presque tous les métaux et céramiques) sont constitués d'un assemblage de petits cristaux dans lesquels les atomes sont empilés en une structure régulière répétée dans les trois dimensions. Les caractéristiques principales de l'empilement atomique s'expriment au travers de la masse volumique du matériau qui est l'expression de la masse et du diamètre des atomes constituants, mais aussi de la densité de l'empilement dans le cristal. La plupart des métaux ont de fortes densités parce que leurs atomes sont lourds et empilés de façon compacte.

#### **I.4 Importance industrielle des matériaux**

Les matériaux constituent la base sur laquelle sont construites les industries, les économies et les civilisations. Ce sont les matériaux qui qualifient les âges de l'humanité, par exemple l'âge de la pierre, du bronze, du fer. C'est le développement des aciers qui détermine en grande partie par l'extension du chemin de fer, la croissance industrielle du XIX<sup>e</sup> siècle. C'est aussi la possibilité de fabriquer des matériaux composites à base de fibres de carbone qui permet de réaliser des enveloppes suffisamment légères et résistante pour constituer les parois des fusées Ariane.



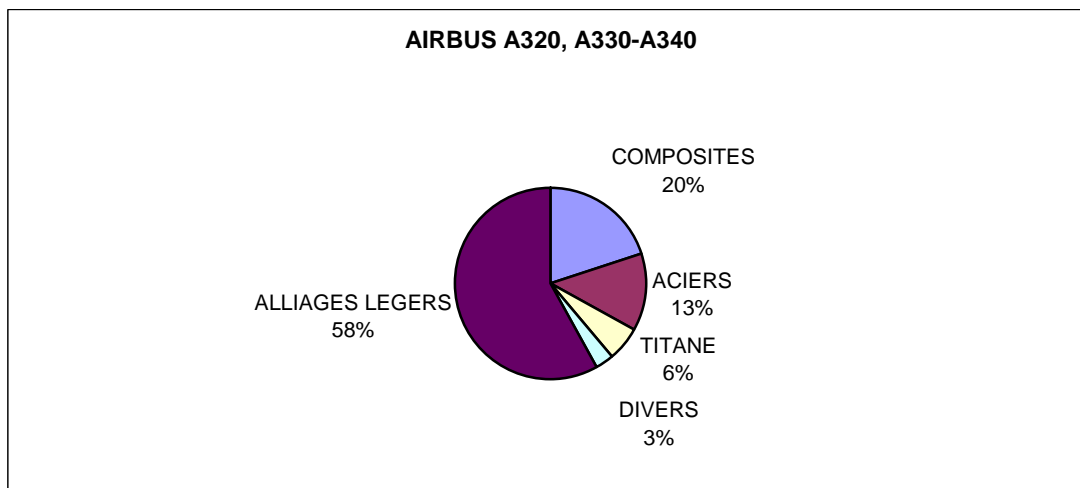


Fig. 1.4. : Principaux matériaux utilisés dans les avions de la famille AIRBUS

## I.5 Importance des propriétés mécaniques des matériaux

Les propriétés mécaniques sont essentielles pour tous ceux qui entre dans la fabrication des structures : machines, équipements, véhicules, avions, ouvrages de génie civil, prothèses, etc. C'est parmi les matériaux de structure que se trouvent ceux qui sont produits en très grande quantité : les alliages d'aluminium, les aciers, les verres, les polymères et élastomères, les bois de construction, les bétons. La nécessité d'une meilleure prise en compte des propriétés mécaniques et de leur relation avec la fabrication et la microstructure peut être mesurée par les accidents et les catastrophes. Par exemple un barrage se rompt subitement provoquant une catastrophe dans la vallée aval. C'est peut-être un problème de fissuration des roches des assises. Ce qui voudrait dire qu'il y a eu une méconnaissance du matériau.

## I.6 Mécanique des solides continus

La mécanique des solides continus est le domaine de la science qui étudie et modélise le comportement de la matière en prenant en compte, contrairement à la Mécanique Rationnelle, sa déformabilité. Comme les déformations dépendent non seulement des forces mais aussi de la température, il faut également prendre en compte les lois d'échange de chaleur et les principes de la thermodynamique. Contrairement à ces principes bien établis, les lois de déformation sont loin d'être simples et connues avec autant de certitude. Si théories et calculs sont nécessaires pour modéliser et prédire, la théorie doit être précédée d'observations et les calculs vérifiés par l'expérience.

### I.6.1 Essais de traction

Dimensionner des structures pour qu'elles puissent supporter le chargement nécessite la résolution complète du problème mécanique associé. Aux équations de conservation (masse, impulsion, énergie), il faut adjoindre les lois de comportement des matériaux constitutifs, qui sont des équations reliant contrainte et déformation. L'établissement de la loi de comportement est généralement phénoménologique, basée sur l'expérimentation macroscopique et l'identification des paramètres dans le cadre de la formulation thermodynamique. Cependant l'identification expérimentale

du comportement mécanique est par nature une opération délicate, car elle ne peut s'effectuer qu'à partir des essais normalisés (AFNOR, Association Française de NORmalisation ; ISO, International Standardisation Organisation ; ASTM, American Society for Testing and Materials, etc).

**L'essai de traction** met habituellement en évidence trois stades principaux dans l'évolution du comportement du matériau.

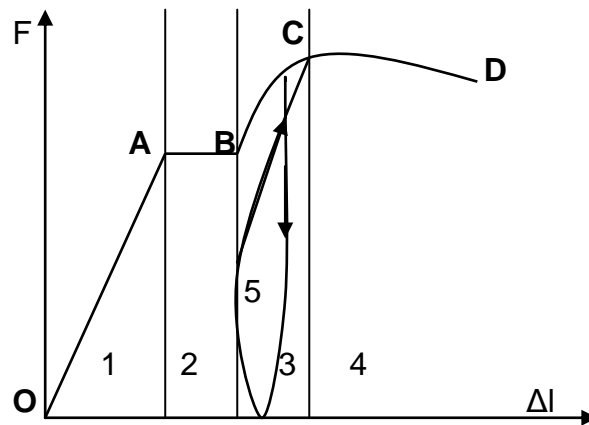


Fig. 1.5. : Essai de traction : réponse typique

Un premier stade de **comportement élastique** linéaire ou non (domaine 1), OA, pour lequel aucune déformation résiduelle ne se maintient après décharge.

Un deuxième stade de **déformation plastique** parfait AB (domaine 2), et avec écrouissage BC (domaine 3), caractérisé par une déformation résiduelle irréversible après décharge, l'ensemble du comportement étant complètement indépendant du temps, notamment de la vitesse de chargement.

Un troisième stade **d'endommagement** (domaine 4) conduisant à la rupture CD. L'endommagement se manifeste par l'altération progressive des propriétés mécaniques qui accompagne, habituellement pour d'assez grandes déformations ou sous sollicitations cycliques, la formation et la croissance de microfissures et microcavités, altération pouvant aller jusqu'à la rupture. Selon les matériaux, la rupture peut se produire plus ou moins tôt, notamment au stade élastique ou plastique avant endommagement.

Il convient de noter que dans bien des cas, le temps intervient et la courbe d'essai obtenue est une fonction de la vitesse de sollicitation (domaine 5). Ainsi, un arrêt à contrainte constante s'accompagne d'une déformation de **fluage**, un arrêt à déformation constante s'accompagne d'une **relaxation** de la contrainte, une sollicitation cyclique d'**hystérésis**. C'est la manifestation d'une viscosité du matériau, les phénomènes correspondants pouvant être simplement viscoélastiques ou visco-élasto-plastiques.

### **1.6.2 Modes de ruines**

Les modes de ruines d'une structure dépendent des sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques qu'elle subit, des défauts qu'elle contient et des propriétés du matériau. Ils comprennent les phénomènes de flambage qui sont des instabilités résultant d'une diminution d'énergie sous faible perturbation des conditions aux

limites. Les agressions chimiques se traduisent par des phénomènes de d'oxydation et de corrosion plus ou moins localisés. Les phénomènes de rupture proviennent d'un endommagement du matériau, c'est-à-dire de l'apparition de nouvelles surfaces. A l'échelle des atomes elles se classent en trois types génériques :

- **les clivages**, rupture de liaisons en traction avec création d'une fissure, concernent les matériaux cristallisés.
- **les glissements**, décalage sous cisaillement des liaisons entre les atomes de deux plans atomiques adjacents sont à l'origine de la déformation plastique ; ils peuvent conduire à une instabilité de la structure, striction ou déchirure ductile lorsque la diminution de section qu'ils induisent ne peut plus être compensée par l'écrouissage (durcissement) du matériau.
- **les cavitations** par diffusion de lacunes : mécanismes très importants en fluage nécessitant des températures élevés de fonctionnement ou de fortes irradiations.

### ***1.6.3 Hétérogénéité et homogénéisation***

Entre l'échelle de la macro mécanique ou mécanique des milieux continus et l'échelle atomique de la micro mécanique (où l'on étudie les phénomènes élémentaires : défauts d'empilement, mouvement des dislocations, interactions avec les défauts ponctuels lacunes, interstitiels, ..), existent dans les matériaux réels des échelles intermédiaires d'inhomogénéité structurale (fibres de renforcement des composites métalliques, granulats des bétons, pores, fissurations, ...) qui constituent la texture des matériaux. Cette texture va influencer considérablement sur certaines de leurs propriétés, tout particulièrement sur leurs caractéristiques de résistance mécanique. Elle est à l'origine des valeurs déduites des propriétés des liaisons et les valeurs mesurées. Il aura fallu attendre la découverte (à partir des années 1930) des défauts (Griffith) et des dislocations (Taylor) et la prise en compte de leurs effets pour expliciter ces différences. Les matériaux réels ne sont pas homogènes. Comportement mécanique et endommagement dépendent non seulement de la composition chimique globale, mais aussi de l'arrangement des diverses phases.

Le passage du niveau intermédiaire au niveau macroscopique peut se faire plus complètement et quantitativement que celui de la structure atomique ou moléculaire au macroscopique. On n'envisagera que la méthodologie de la démarche d'homogénéisation qui consiste un tel passage. Il s'agit de remplacer un matériau réel par un matériau fictif, homogène équivalent tel que dans les structures étudiées et leurs échelles les champs de contrainte et de déformation soient (macroscopiquement) les mêmes dans les structures réelles et homogénéisées. Cela nécessite que l'on puisse adopter comme volume élémentaire de la structure, un volume élémentaire représentatif du matériau.

On désignera par  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon$ ,  $d..$ , les quantités définies à l'échelle microscopique et par  $\Sigma$ ,  $E$ ,  $E$ ,  $D$ , les quantités macroscopiques équivalentes.

### ***Méthodologie***

On peut distinguer trois étapes dans toutes les méthodes de traitement des matériaux hétérogènes :

- une étape de la représentation : définition des phases et description de leur répartition spatiale et de leur comportement mécanique ;
- une étape de la localisation : modélisation mécanique et détermination des relations entre champs locaux et grandeur macroscopique ;

- une étape d'homogénéisation : opération de moyenne et détermination du comportement effectif.

#### a) La représentation

- on doit d'abord choisir un niveau caractéristique d'hétérogénéité et déterminer la nature des paramètres permettant la description des phases correspondantes. Exemple : dans le cas d'un poly cristal biphasé, on ne peut tenir compte que des deux phases, chacune étant décrite globalement ; on peut tenir compte de la nature granulaire et cristallographique de chaque phase macroscopique et prendre, comme phases élémentaires, les grains de même composition chimique et de même orientation cristalline ; on peut prendre également en compte la forme des grains, leur taille, ...
- on doit ensuite caractériser le comportement mécanique de chaque phase, prise comme un milieu homogène et continu. Exemple : comment ne pas assimiler le comportement (moyen) d'un grain de polycristal à celui d'un monocristal isolé de même orientation ?
- on doit enfin décrire la géométrie de la structure. En dehors de certains où l'on peut envisager une description déterministe, il faut recourir à des descriptions statistiques ; Exemple : description de la texture cristallographique d'un polycristal : 1) en prenant  $g = (\psi, \theta, \varphi)$  angles d'Euler d'une orientation cristalline par rapport à un repère extérieur, on définit la fonction de distribution des orientations cristallines (ou fonction de texture)  $f(g)$  par :  $dV/V = f(g) dg$ .

Où  $dV/V$  représente la fraction de volume des grains qui ont l'orientation  $(g)$  à  $(dg)$  près.

2) dans le cas d'un matériau composite élastique : description statistique de la distribution spatiale des modules  $c(r)$  par leurs fonctions de corrélation.

Soit  $c_1 = c(r_1)$  et  $P_1(c_1)$  sa densité de probabilité :  $P_1(c_1)dc_1$  est la probabilité que  $c(r_1) = c_1$  à  $dc_1$  près. De même,  $P_2(c_1, c_2)dc_1dc_2$  est celle que  $c(r_1) = c_1$  à  $dc_1$  près et  $c(r_2) = c_2$  à  $dc_2$  près.

Pour des fonctions  $f(c_1)$  et  $g(c_1, c_2)$  on définira les moyennes d'ensemble :

$\langle f \rangle = \int f(c_1) P_1(c_1)dc_1$  ,  $\langle g \rangle = \int g(c_1, c_2) P_2(c_1, c_2) dc_1dc_2$ . On a ainsi notamment les fonctions de corrélations aux différents ordres :

$\langle c_1 \rangle = \int c_1 P_1(c_1)dc_1$  ,  $\langle c_1, c_2 \rangle = \int c_1 c_2 P_2(c_1, c_2) dc_1dc_2$

#### b) La localisation

Il s'agit de relier les grandeurs mécaniques locales et macroscopiques, du fait que l'on a à cause de l'hétérogénéité:  $\sigma \neq \Sigma$  ;  $\epsilon \neq E$

#### c) L'homogénéisation

Cette étape consiste, par l'intermédiaire de la relation entre grandeurs macroscopiques et moyennes de grandeurs locales, en la détermination du comportement effectif (ou homogénéisé), et, éventuellement en la réactualisation de la microstructure initiale. On se limitera aux transformations infinitésimales.

- Moyennes : les contraintes et déformations macroscopiques peuvent être définies comme les moyennes spatiales des contraintes et déformations locales :

$$\Sigma = (\sigma) = 1/v \int_V \sigma \, dv \qquad E = (\epsilon) = 1/v \int_V \epsilon \, dv$$

Il en va de même des grandeurs additives, telles que masse volumique, énergie interne, entropie spécifique... Mais les problèmes de détermination de champs de contraintes ou déformations à moyennes définies sont généralement mal posés : il faut des conditions à la limite mieux définies. On peut envisager des conditions aux limites homogènes, qui sont compatibles avec la définition précédente des moyennes.

a) si l'on impose  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \Sigma \cdot \vec{n}$  sur  $\partial V$  ( $\text{div } \sigma = 0$ ), on a :

$$* \int_V \sigma_{ij} \, dV = \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} \, dV = \int_{\partial V} \sigma_{ik} x_j n_k \, dS = \Sigma_{ik} \int_{\partial V} x_j n_k \, dS = \Sigma_{ik} \int_V x_{j,k} \, dV = \Sigma_{ik} \int_V \delta_{jk} \, dV = V \Sigma_{ij}$$

b) si l'on impose  $\vec{u} = E \cdot \vec{x}$  sur  $\partial V$ , on a :

$$\int_V u_{i,j} \, dV = \int_{\partial V} u_i n_j \, dS = \int_{\partial V} E_{ik} x_k n_j \, dS = E_{ik} \int_V x_{k,j} \, dV = V E_{ij}$$

- soit  $\sigma^*$  statiquement admissible et  $\epsilon'$  cinématiquement admissible tels que soit  $\sigma^*$ , soit  $\epsilon'$ , vérifie les conditions homogènes ci-dessus. On alors :

$$T = V \langle \sigma^* : \epsilon' \rangle = \int_V \sigma^*_{ij} \epsilon'_{ij} \, dV = \int_V \sigma^*_{ij} u'_{i,j} \, dV = \int_V \sigma^*_{ij} (u'_i)_{,j} \, dV = \int_{\partial V} \sigma^*_{ij} u'_i n_j \, dS$$

d'où si  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \Sigma \cdot \vec{n}$  sur  $\partial V$  :

$$T = \Sigma_{ij} \int_{\partial V} u'_i n_j \, dS = \Sigma_{ij} \int_V \epsilon'_{ij} \, dV = V \langle \sigma^* \rangle : \langle \epsilon' \rangle$$

et si  $u'_i = E_{ij} x_j$  sur  $\partial V$  :

$$T = \int_{\partial V} \sigma^*_{ij} E_{ik} x_k n_j \, dS = E_{ik} \int_V (\sigma^*_{ij} x_k)_{,j} \, dV = E_{ik} \int_V \sigma^*_{ik} \, dV = V E : \langle \sigma^* \rangle, \text{ soit ainsi dans tous les cas } \langle \sigma : \epsilon \rangle = \langle \sigma^* \rangle : \langle \epsilon \rangle \quad (\text{Théorème de Hill})$$

### 1.6.4 Anisotropie

Les comportements mécaniques sont généralement anisotropes (dépendance de la réponse vis-à-vis de la direction de la sollicitation), propriété dépendant de la constitution du matériau, elle-même liée à l'hétérogénéité de sa microstructure. Cependant, lorsque la microstructure présente certains éléments de symétrie, il en est de même de l'anisotropie et la loi de comportement correspondante doit respecter ces éléments de symétrie.

L'origine physique de l'anisotropie est l'hétérogénéité de la microstructure. Si l'on décompose celle-ci en éléments homogènes, l'anisotropie macroscopique résulte d'une anisotropie élémentaire, celle des éléments homogènes de la microstructure, et d'une anisotropie d'organisation, attachée à l'agencement spatial de ces éléments homogènes.

L'anisotropie élémentaire est déterminée par l'anisotropie des mécanismes de déformation, elle-même liée à l'anisotropie de la structure interne des éléments (liaisons atomiques, directions de glissement cristallographique, etc.) :

- élasticité : l'anisotropie des liaisons interatomiques, dépendant des structures atomiques, moléculaires, électroniques, etc. se traduit par celle des modules et des complaisances d'élasticité ( $C_{ijkl}$ ,  $S_{ijkl}$ ) : ainsi le module de Young d'un cristal dépend de l'orientation de traction par rapport au réseau cristallin.

- viscosité : anisotropie des mouvements réversibles d'impuretés (atomes dans un alliage fer-carbone....) ou des défauts d'empilement cristallin, du glissement relatif des chaînes polymériques..., se traduisant dans celle des viscosités  $\eta_{ijkl}$ .
- plasticité : anisotropie du glissement cristallographique, ne pouvant se réaliser que sur certains plans et/ou certaines directions cristallographiques déterminées.

L'anisotropie d'organisation résulte de l'hétérogénéité de la microstructure : forme, orientation et répartition spatiale de grains, inclusions, cavités, textures,...

### **I.6.5 Comportement mécanique des matériaux**

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'analyse de la rigidité des structures en terme de force et d'allongement ne permet pas de distinguer la contribution de la géométrie de celle, intrinsèque, du matériau. Pour ce faire, il faut définir en tout point de la structure un état mécanique local indépendant de sa géométrie. La caractérisation de cet état local en terme de contrainte  $\sigma$  et de déformation  $\varepsilon$  – la relation entre ces grandeurs et leurs dérivées temporelles définissant la loi de comportement macroscopique- est traitée au second chapitre.

La plupart des structures étant conçues pour supporter un chargement à température ambiante en n'accusant que de faibles déformations, on abordera dans le chapitre III la loi de comportement élastique des matériaux. Au-delà d'un chargement critique, les matériaux ductiles (particulièrement les métaux) présentent un comportement fluide et s'écoulent sous contrainte. Cet écoulement s'arrête lorsque le chargement est réduit en dessous du seuil critique mais le matériau s'est déformé de manière permanente. Ce comportement sera appelé comportement plastique. Il sera traité au chapitre IV.

Tout matériau fortement sollicité s'endommage progressivement jusqu'à présenter des défauts macroscopiques. La mécanique de la rupture a pour objet l'étude de ces défauts. Cette partie ne sera pas traitée dans ce document.

## CHAPITRE II : ETAT MECANIQUE

### II.1 Milieux déformables

#### II.1.1 Forces externes et équilibre mécanique

La loi fondamentale de la dynamique  $m \vec{\gamma} = \Sigma \vec{F}$  appliquée à un corps en équilibre mécanique statique implique la nullité de la résultante et du moment résultant des efforts extérieurs appliqués.

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \vec{M} = 0$$

- si le nombre d'efforts extérieurs est égal au nombre d'équations, le corps est en état d'équilibre *isostatique* et les efforts sont entièrement déterminés.
- si ce nombre est supérieur au nombre d'équations, le corps est en état d'équilibre hyperstatique, et la détermination des efforts implique la prise en compte de la déformation du milieu pour obtenir les équations complémentaires.

#### II.1.2 Forces internes, forces de surface et de transmission des efforts

Sous l'action d'efforts externes, tout corps se déforme. Cette déformation fait apparaître des forces internes dont l'origine se situe à l'échelle atomique. Ce sont les liaisons atomiques distendues (ou comprimées) qui exercent des forces de rappel qui tendent à ramener les atomes à leur position d'équilibre, et le corps dans son état initial. Les forces de rappel à l'origine des forces internes sont des forces de courte portée qui ne se transmettent qu'à leur environnement immédiat.

Il en résulte que les forces exercées sur une partie du corps par les parties environnantes agissent directement par sa surface.

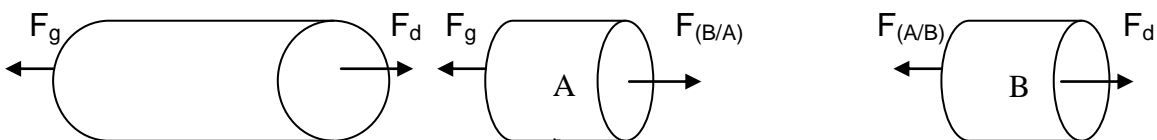


Fig.2.1: Principe de l'action et de la réaction

L'action de la partie A sur la partie B est égale et opposée à l'action de la partie B sur la partie A.

Considérons un corps soumis à l'action des forces extérieures  $F_g$  et  $F_d$ . L'équilibre mécanique statique  $\vec{F}_g + \vec{F}_d = 0$ . Séparons par la pensée ce corps en deux parties A et B. L'équilibre de la partie A prise isolément impose l'existence d'une force  $F_{(B/A)}$  telle que  $-\vec{F}_g + \vec{F}_{(B/A)} = 0$ , force interne représentant l'action de la partie B sur la partie A. Réciproquement l'équilibre de la partie B prise isolément impose l'existence d'une force  $F_{(A/B)}$  telle que  $\vec{F}_d + \vec{F}_{(A/B)} = 0$ , force interne représentant l'action de la partie A sur la partie B. Il résulte de l'équilibre du corps pris dans son ensemble que la résultante des forces internes est toujours nulle.

*NB : axiome d'objectivité : la puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle (voir mécanique des solides, J. Lemaître et J.-L. Chaboche).*

$$\vec{F}_{(B/A)} + \vec{F}_{(A/B)} = 0$$

### II.1.3 Raideur, rigidité, état mécanique local

La raideur  $K$  est définie comme le rapport de l'effort de traction à l'allongement  $\Delta l$  résultant.

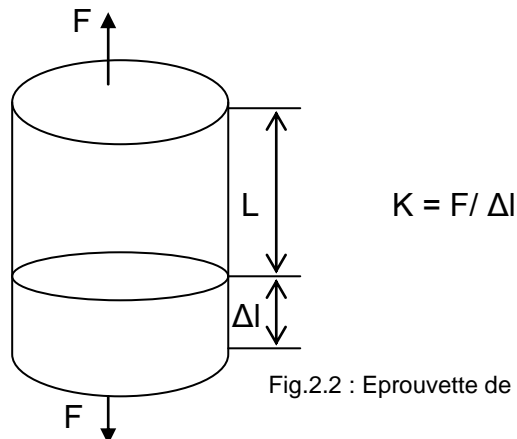


Fig.2.2 : Epreuve de section  $S$  en traction

L'expérience de traction  $F$  sur une éprouvette de section  $S$  montre que l'allongement résultant  $\Delta l$  varie proportionnellement à la longueur initiale  $l$  de l'éprouvette. Ainsi la formule précédente peut se mettre sous la forme :

$$F/S = E \frac{\Delta l}{l}$$

La quantité  $E$  indépendante de la géométrie de l'éprouvette est une caractéristique intrinsèque du matériau : sa rigidité.

Les variables décrivant l'état mécanique local, indépendamment de la géométrie de la structure, seront donc :

- la contrainte  $\sigma = F/S$  : densité surfacique de force ;
- la déformation  $\varepsilon = \Delta l / l$  : variation relative de longueur.

## II.2 Contraintes

Elles caractérisent l'état de sollicitation mécanique (efforts internes) en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance.

### II.2.1 vecteur contrainte

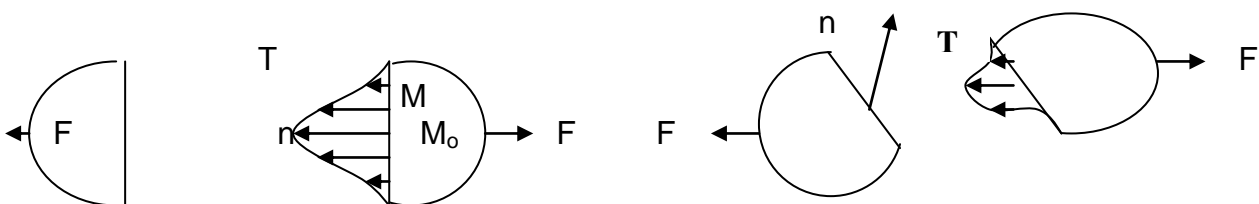


Fig 2.3 : Le vecteur contrainte  $T$  dépend du point  $M$  et de l'orientation de  $n$  de la facette

En un point  $M_0$  donné, considérons deux sections de coupe  $S$  et  $S'$  caractérisées respectivement par leurs orientations  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ . Pour chacune d'elles, le vecteur contrainte  $T$  vérifie :

$$\text{sur } S \quad \int_S \vec{T} dS = f \quad \text{sur } S' \quad \int_{S'} \vec{T} dS' = f$$

$$\text{En } M_0 : \vec{T}(M_0, \vec{n}) \neq \vec{T}(M_0, \vec{n}')$$



La contrainte normale  $\sigma$  est la composante de  $T$  qui tire lorsqu'elle est parallèle à  $n$  ou qui pousse si elle est antiparallèle. Le signe de  $\sigma$  est donc intrinsèque :  $\sigma > 0$  pour la traction  $\sigma < 0$  pour la compression.

La contrainte de cisaillement  $\tau$  est la composante de  $T$  qui agit à la manière d'une « cisaille ».

L'état mécanique local au point  $M$  sera déterminé si l'on connaît en ce point les composantes de  $\sigma$  et de  $\tau$  de tous les vecteurs contraintes  $T(M,n)$  associées à toutes les facettes d'orientations  $n$  possible passant par ce point.

## II.2.2 Tenseur des contraintes

En un point  $M$  donné, il existe nécessairement des relations entre les divers vecteurs contraintes  $T$  associés aux diverses facettes de normales  $n$  passant par ce point. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'équilibre mécanique statique d'une particule de centre  $M$ . Pour une telle particule, de surface externe  $S$ , les vecteurs contraintes doivent vérifier :

$$\int_S \vec{T} dS = 0 \quad \int_S \vec{r} \wedge \vec{T} dS = 0$$

Traduisant la nullité de la résultante des efforts exercés par son environnement et de son moment.

### Formule de changement de base pour un vecteur

Soient  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_R$ , les vecteurs de base du repère  $R$ , et  $((e'_1, e'_2, e'_3)_{R'}$  du repère  $R'$

$$e'_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3$$

$$e'_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3$$

$$e'_3 = a_{31} e_1 + a_{32} e_2 + a_{33} e_3$$

Les coordonnées d'un vecteur  $u = (u_1, u_2, u_3)_R = u' = (u'_1, u'_2, u'_3)_{R'}$

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix}_{R'} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_R = \mathbf{A}_R \rightarrow_{R'} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_R$$

La relation de passage inverse dans le cas d'une base orthonormée directe :

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}, \text{ soit } \mathbf{A}_{R \rightarrow R'}^t = \mathbf{A}_{R' \rightarrow R}$$

## Cas d'une rotation autour de l'axe x3

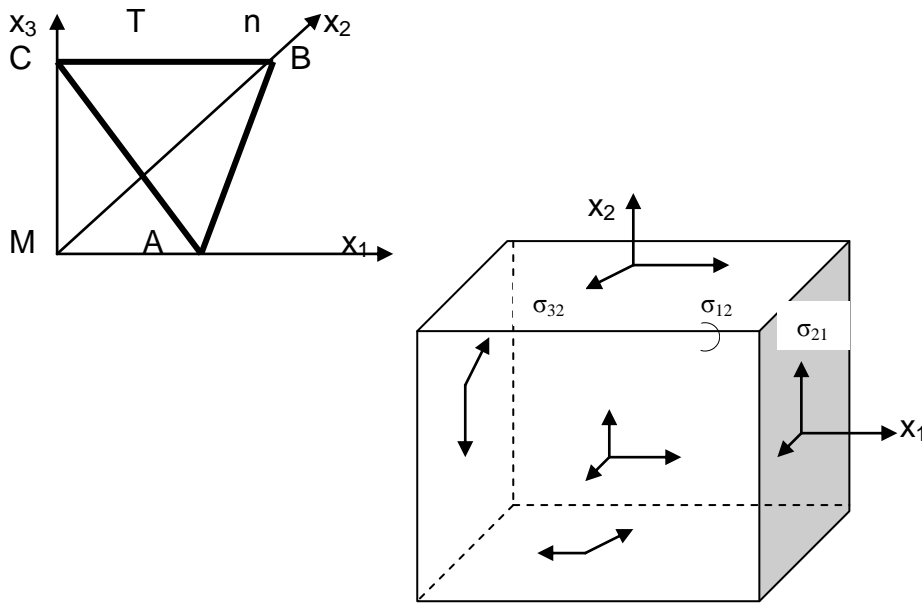


Fig. 2.4 : Equilibre d'un tétraèdre

$$\begin{aligned} \vec{T}_1(M, x_1) &= \sigma_{11}x_1 + \sigma_{21}x_2 + \sigma_{31}x_3 \\ \vec{T}_2(M, x_2) &= \sigma_{12}x_1 + \sigma_{22}x_2 + \sigma_{32}x_3 \\ \vec{T}_3(M, x_3) &= \sigma_{13}x_1 + \sigma_{23}x_2 + \sigma_{33}x_3 \end{aligned}$$

D'une manière générale la relation entre  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} \vec{n}$

$$\vec{\sigma}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

La connaissance des vecteurs contraintes agissant sur les trois facettes orthogonales de normales  $x_1, x_2, x_3$  suffit à déterminer au point M l'état de contrainte caractérisé par le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$ , donc le vecteur contrainte  $T(M, n)$  sur la toute la facette contenant M.

## II.2.3 Propriétés du tenseur des contraintes

### II.2.3.1 Repère principal et invariants

Le tenseur  $\overline{\sigma}$  (M) définissant l'état de contrainte en un point M est un opérateur intrinsèque qui lie la normale  $n$  à une facette passant par ce point au vecteur contrainte qui s'applique à cette facette.

Cette définition est indépendante du repère choisi, seule sa représentation, les valeurs de ses composantes, dépend du repère. Il existe un repère particulier, le repère principal dans lequel le tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  (M) a pour représentation une matrice diagonale dont les composantes sont appelées contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Ce sont les valeurs propres toujours réelles de l'opérateur.

Les contraintes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (ainsi que  $\overline{\sigma}(M)$ ) vérifient l'équation caractéristique :

$$\text{Dét}(\overline{\sigma} - \lambda \overline{\delta}) = 0 \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad \text{Caley- Hamilton ou } \overline{\sigma}^3 - I_1 \overline{\sigma}^2 + I_2 \overline{\sigma} - I_3 \overline{\delta} = 0$$

$I_1, I_2, I_3$  sont des coefficients.

$$I_1 = \text{Tr}(\overline{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \overline{\delta} : \overline{\sigma} : \overline{\sigma} = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = 1/6 \overline{\delta} : \overline{\sigma} : \overline{\sigma} : \overline{\sigma} = \text{Dét}(\overline{\sigma}) = 1/6 \overline{\delta}_{ijk} \overline{\delta}_{pqr} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \sigma_{kr} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

### II.2.3.2 Contrainte sphérique, contrainte déviatorique

Tout état de contrainte est décomposable en deux états :

- le sphérique : état isotrope caractérisé par la contrainte normale moyenne (traction ou compression)  $\sigma_m = 1/3 \text{Tr}(\overline{\sigma})$  auquel est associée la partie sphérique  $\overline{S} = \overline{\sigma}_m \overline{\delta}$  du tenseur  $\overline{\sigma}$ ;
- le déviateur anisotrope traduisant les déviations par rapport à l'isotropie moyenne et caractérisé par la contrainte déviatorique moyenne (cisaillement)  $\sigma_d = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\overline{\sigma} - \overline{S})^2}{3}}$  auquel est associé la partie déviateur  $\overline{D} = \sigma_d \overline{\Pi}$  du tenseur  $\overline{\sigma}$

$$\overline{\sigma} = \overline{S} + \overline{D} = \sigma_m \overline{\delta} + \sigma_d \overline{\Pi}; \quad \text{Trace Tr}(D) = 0 \text{ est nulle par définition.}$$

En plasticité, on fait souvent intervenir les invariants des déviateurs de contrainte.

La contrainte hydrostatique est donnée par :

$$J_1(\overline{\sigma}) = 1/3 \sigma_I = \sigma_H \text{ avec } \sigma_I = \text{Tr}(\overline{\sigma})$$

La contrainte équivalente au sens de Mises

$$J_2(\overline{\sigma}) = (3s_{II})^{1/2} = \sigma_{eq}$$

L'invariant de contrainte homogène à une contrainte unidimensionnelle

$$J_3(\overline{\sigma}) = (27/2 s_{III})^{1/3}; \quad s_I, s_{II}, s_{III} \text{ sont les invariants du déviateur de contrainte.}$$

### II.2.3.3 Cercles de Mohr

La représentation de Otto Mohr de l'état mécanique présente l'avantage d'un diagramme plan ne comportant que des cercles et des droites, et s'appuie sur la représentation du vecteur contrainte  $T(M, n) = \overline{\sigma}(M) n$  associé à la facette de normale  $n$  dans le repère local de la facette de sorte qu'il n'admet que deux composantes  $\sigma_{nn}$  et  $\sigma_{rn}$ . Elle définit l'état mécanique au point M du corps dans l'espace local des contraintes caractérisé par le plan O,  $\sigma_{nn}, \sigma_{rn}$  comme l'ensemble des points P extrémités du vecteur  $T(M, n)$  pour toutes les valeurs possibles de l'orientation  $n$ . Ce lieu est défini par le système des trois équations suivantes :

$$\overline{n} \cdot \overline{n} = 1 \quad \sigma_{nn} = T \cdot n = (\overline{\sigma}(M) \cdot n) \cdot n \quad \sigma_{nn}^2 + \sigma_{rn}^2 = \overline{T} \cdot \overline{T} = (\overline{\sigma}(M) \cdot n) \cdot (\overline{\sigma}(M) \cdot n)$$

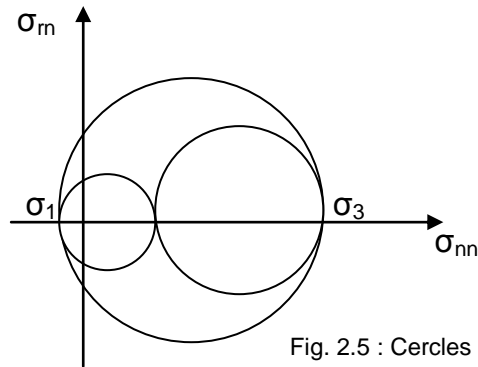


Fig. 2.5 : Cercles de Mohr

En supposant  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ , le centre des cercles est donné par  $(\sigma_i + \sigma_j)/2$  et le rayon par  $(\sigma_i - \sigma_j)/2$

### II.3 Loi fondamentale de la dynamique

#### Equation de l'équilibre dynamique

En prenant maintenant en compte les forces de volume et d'accélération par la particule de matière, on peut établir l'équation de l'équilibre dynamique. A l'échelle du milieu continu, ces forces seront caractérisées par leurs densités massiques :

- accélération :  $\rho \vec{\gamma}$  (M)
- force externe :  $\vec{\rho X}$  (M)

$\rho$  (M) étant la masse volumique du milieu matériel,  $\vec{\gamma}$  (M) l'accélération et  $\vec{X}$  (M) la densité massique de force externe auxquelles il est soumis.

En mécanique, la densité massique de force la plus fréquemment rencontrée est la gravité  $g$  qui permet de prendre en compte l'effet du poids propre de la structure.

Selon le principe des puissances virtuelles, par application de l'axiome d'équilibre, pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération  $P_{(a)}$  est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs  $P_{(i)}$  et des efforts extérieurs  $P_{(e)}$ .

$$P_{(a)} = P_{(i)} + P_{(e)}$$

L'axiome d'objectivité et celui de l'équilibre entraînent la loi fondamentale de la dynamique.

$$P_{(a)} = \int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{\nu} \rho \, dV$$

$$P_{(i)} = - \int_D \sigma : D \, dV$$

$$P_{(e)} = \int_D f \cdot v \, dV + \int_{\partial D} T \cdot v \, dS$$

$T$  est la densité surfacique de forces,  $f$  la densité volumique de force,  $D$  le taux de déformation

$$D = \frac{1}{2} [\text{grad } v + (\text{grad } v)^T]$$

$$\int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{\nu} \rho \, dV = - \int_D \sigma : D \, dV + \int_D f \cdot v \, dV + \int_{\partial D} T \cdot v \, dS$$

$$-\int_D \sigma : D \, dV = -\int_D \sigma : \text{grad } v \, dV = -\int_{\partial D} \sigma \cdot v \cdot n \, dS + \int_D \text{div} \sigma \cdot v \, dV$$

$$\int_D \gamma \cdot v \rho \, dV = -\int_{\partial D} \sigma \cdot v \cdot n \, dS + \int_D \text{div} \sigma \cdot v \, dV + \int_D f \cdot v \, dV + \int_{\partial D} T \cdot v \, dS$$

d'où 
$$\int_D (\text{div} \sigma + f - \gamma \rho) \cdot v \, dV + \int_{\partial D} (T - \sigma \cdot n) \cdot v \, dS = 0$$

On a alors: 
$$\text{div} \sigma + \vec{f} - \gamma \rho = 0 \quad \text{dans } D \text{ et } T = \sigma \cdot n \text{ sur } \partial D$$

De la même façon, on peut écrire l'équilibre mécanique global en isolant au sein d'un milieu un volume  $V$  limité par une surface  $S$ . Ce volume est soumis aux densités massiques de forces externes  $\gamma$  et  $X$  ( $M$ ) et à la densité surfacique de forces  $T$  ( $M, n$ ) exercée par la matière environnante. La loi fondamentale de la dynamique  $m\vec{\gamma} = \Sigma \vec{F}$  s'écrit sous la forme d'un bilan intégral étendu au volume  $V$  :

$$\int_V \rho \gamma \, dV = \int_V \rho X \, dV + \int_S T \, dS$$

Comme les actions de contact sont liées par la relation  $T = \sigma \cdot n$ , le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale sur  $S$  en intégrale sur  $V$

$$\int_S T \, dS = \int_S \sigma \cdot n \, dS = \int_V \text{div}(\sigma) \, dV$$

et le bilan s'écrit : 
$$\int_V \rho \gamma \, dV = \int_V \rho X \, dV + \int_V \text{div}(\sigma) \, dV$$

Ce bilan est indépendant du volume  $V$  choisi, il en résulte l'équation de l'équilibre dynamique :

$$\text{div} \sigma + \rho \vec{X} - \rho \vec{\gamma} = 0$$

## II. 4 Déformations

Sous l'action d'un chargement, tous les corps subissent un changement de forme, de position et d'orientation entre un état initial avant application de la charge et un état final consécutif à son application. Les déformations caractérisent le changement de forme local en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance.

### II.4.1 Principe de superposition

Une approche classique de résolution d'un problème de mécanique (connue sous le nom de Principe de superposition) consiste à décomposer la sollicitation appliquée à une structure en une somme de sollicitations élémentaires pour lesquelles il est aisé de déterminer, à partir de la géométrie initiale, l'état de contrainte et de déformation induite correspondante, puis de déterminer l'état de déformation globale par addition de ces états élémentaires de déformation. Cette approche est applicable en petites déformations du matériau.

### II.4.2 Petites déformations

La plupart des structures étant constituées de matériaux cristallins peu déformables travaillant en régime élastique, l'approximation des petites déformations est largement suffisante. Elle offre plus l'avantage du principe de superposition.

### II.5.2.2 Trajectoire d'une particule

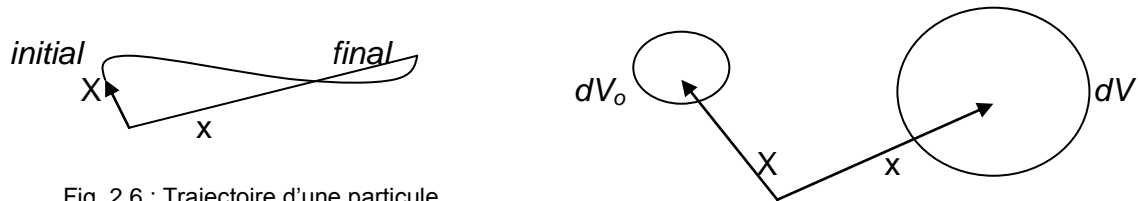


Fig. 2.6 : Trajectoire d'une particule

Au cours de l'application du chargement une particule de matière de coordonnées initiale  $X$  se déplace pour occuper une nouvelle position de coordonnées finales  $x$ . La transformation géométrique qui définit le passage de l'état initial de référence à l'état final déformé est donc caractérisée dans un même repère fixe par la fonctionnelle vectorielle  $x = F(X)$ .

Si on se limite à une petite région, une boule de volume  $dV_0$  autour du point matériel  $P_0$ , le centre  $P_0$  se translate en  $P$  et les points voisins  $Q_0$  se déplacent en  $Q$ . Leur ensemble forme une boule déformée de volume  $dV$ .

Un développement limité conduit à  $dx = \gamma(X) dX$  en appelant  $\gamma(X) = \text{grad } F(X)$  le tenseur gradient de la transformation au point  $P_0$ .

La relation :

$$dx = \gamma(X) dX \quad dx_i = (\partial x_i / \partial X_j) dX_j \quad \det(\gamma) = dV / dV_0$$

définit l'affinité tangente à la transformation au point  $P_0$ . Le *Jacobien*  $\det(\gamma)$  de la transformation étant par définition le rapport du volume  $dV$  de la boule déformée au volume  $dV_0$  de la boule initiale.

Plutôt que de caractériser la transformation affine tangente par les positions finales de  $x$  des points matériels de position  $X$  dans l'état initial, il est plus commode d'étudier le champ de déplacement  $u$  induit par la transformation et défini par

$u(X) = x - X$ . En appelant  $G = \text{grad } u$  le tenseur gradient du champ de déplacement au point  $P_0$ , la transformation affine tangente  $dx = \gamma(X) dX$  s'écrit alors en terme de déplacement :

$$du = G(X) dX \quad du_i = (\partial u_i / \partial X_j) dX_j \quad G = \gamma - \delta$$

En décomposant  $G$  en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique, on fait apparaître le tenseur (du second) des taux de déformation  $\epsilon$  et le tenseur des taux de rotation  $\Omega$  :

$$G = \overrightarrow{\text{grad } u} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad } u} + (\overrightarrow{\text{grad } u})^T] + \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad } u} - (\overrightarrow{\text{grad } u})^T] \text{ avec}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad } u} - (\overrightarrow{\text{grad } u})^T]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad } u} + (\overrightarrow{\text{grad } u})^T] \quad \text{ou } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

En pratique l'hypothèse des petites déformations peut être appliquée tant que le carré du module de la déformation reste inférieur à l'ordre de grandeur de la précision des calculs envisagés soit :

$$|\epsilon| < 2 \text{ à } 5 \cdot 10^{-2}$$

Ce sera le cas dans la plupart des développements que nous considérons dans cet ouvrage.

### II.4.3 Tenseur de déformation

Dans le cadre de la théorie des petites déformations, l'état de déformation en un point M est donc caractérisé par le tenseur symétrique  $\varepsilon$  et la relation donnant le déplacement d'extrémité  $u(M, I)$  d'un segment unitaire d'origine M et de direction I est donnée par :

$$\vec{u}(M, I) = \varepsilon(M) I$$

$\varepsilon(M)$  caractérise au point M la relation entre les vecteurs déplacement  $u$  de segments unitaires de différentes orientations  $I$ .

La relation entre  $u(M, I)$  et  $I$  s'écrit de manière générale à l'aide du tenseur  $\varepsilon(M)$  dont les composantes dans le repère sont :

$$\varepsilon(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

### II.4.4 Propriétés du tenseur de déformation

Le tenseur  $\varepsilon(M)$  définissant l'état de déformation en un point M est un opérateur intrinsèque symétrique par construction, qui lie le vecteur déplacement  $u(M, I)$  du segment unitaire  $I$  d'origine M à son orientation. Cette définition est indépendante du repère choisi, seule sa représentation, les valeurs de ses composantes, dépend du repère.

La déformation  $\varepsilon = S + D$  est la somme :

- d'une déformation sphérique isotrope (S) (gonflement ou dégonflement) caractérisé par l'extension moyenne  $\varepsilon_m$  prenant en compte la variation de volume  $\theta = 3 \varepsilon_m = \text{Tr}(\varepsilon)$  à forme constante ;
- d'une déformation déviatrice anisotrope (D) prenant en compte le changement de forme à volume constant ( $\text{Tr}(D) = 0$ ).

Du point de vue des matériaux, si la déformation élastique induit toujours, sauf cas particuliers, un changement de volume, la déformation plastique s'effectue au contraire à volume constant et ne fait intervenir que le déviateur des déformations.

### II.4.5 Invariants du tenseur de déformation

De la même manière que sont définis les invariants du tenseur des contraintes, on peut définir les invariants du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \text{Tr}(\varepsilon) = \varepsilon_{ii} \\ \varepsilon_{II} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{III} &= \frac{1}{3} \text{Tr}(\varepsilon^3) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} \end{aligned}$$

De même que dans le cas des contraintes, en plasticité, on fait souvent intervenir les invariants des déviateurs de déformation plastique.

La déformation volumique est donnée par :

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{3} \varepsilon_I = \varepsilon_H$$

La déformation inélastique équivalente au sens de Mises est donnée par :

$$I_2(\varepsilon^p) = (4/3 e_{pII})^{1/2} = \varepsilon_{peq}$$

#### II.4.6 Continuité et compatibilité des déformations

On revient à la transformation affine précédente qui décrit l'évolution d'une particule de matière de volume  $dV$  au cours de l'application d'un chargement. Pour que cette transformation existe, il faut qu'il y ait correspondance biunivoque entre chaque point matériel du domaine dans l'état initial et dans l'état final, ce qui implique que  $dV/dV_0 = \det \gamma$  soit strictement positif.

Déty  $> 0$  n'est que l'expression de la condition de continuité. Il en découle les conséquences suivantes :

- tous points matériels formant un ensemble connexe (volume, surface, courbe) forment toujours un ensemble connexe de même nature au cours de la distorsion ;
- tout point matériel situé à l'intérieur d'une surface fermée reste à l'intérieur de cette surface transformée par la distorsion ;
- les points matériels qui forment dans la configuration de référence la frontière d'un milieu continu en forment encore la frontière quelque soit l'évolution de la distorsion ;
- la masse contenue à l'intérieur d'une surface matérielle fermée reste constante au cours de la distorsion. Par surface matérielle on entend une surface constituée toujours par les mêmes points matériels, surface qui se déplace et se déforme par rapport (aspect Lagrangien). Ce terme s'oppose au terme de surface géométrique qui désigne une surface invariable par rapport au référentiel. Au cours de la distorsion les points matériels traversent la surface géométrique (aspect Eulérien).

La conservation de masse (dans le référentiel fixe) :  $dm = \rho dV = \rho_0 dV_0$  permet d'écrire la condition de continuité sous la forme :

$$\rho \det \gamma = \rho_0 \quad \rho - \rho_0 + \rho(\det \gamma - 1) = 0$$

#### II.4.7 Lois de comportement : relations contraintes- déformations

Pour établir une relation entre le changement de forme d'une structure et les efforts qui lui sont appliqués, c'est-à-dire la relation contraintes –déformations, et l'usage que fera le matériau du travail qui lui est fourni, il faut faire appel à la loi de comportement du matériau, son équation d'état en terme de  $\sigma$  et  $\varepsilon$  vraies qui s'écrit de manière générale comme une fonctionnelle tensorielle des tenseurs de contraintes et de déformation et de leurs dérivées temporelles :

$$F\{\sigma, d\sigma/dt, \dots, \varepsilon, d\varepsilon/dt, \dots\} = 0$$

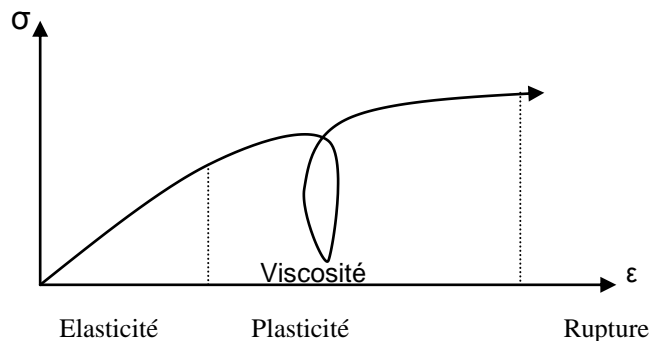


Fig. 2.7 : comportement d'un matériau soumis à la traction



## CHAPITRE III : ELASTICITE

Le comportement élastique des matériaux est certainement le plus classique, le plus mieux connu et le plus largement utilisé dans les calculs de structure. Nous mettrons l'accent sur deux aspects de ce comportement, souvent étroitement liés, que le développement actuel des matériaux composites met particulièrement en lumière : anisotropie et hétérogénéité.

Nous envisagerons dans ce qui suit le comportement élastique parfait. Ce comportement correspond à une réversibilité mécanique parfaite. Le tenseur des déformations  $\varepsilon$  est alors une variable d'état et sa donnée détermine, de manière biunivoque, le tenseur des contraintes  $\sigma$ . Le travail de déformation développé entre deux états d'équilibre est alors indépendant du chemin suivi entre ces deux états.

### III.1 Potentiel d'élasticité

#### III.1.1 Travail virtuel de déformation

Le travail de déformation (éventuellement virtuel) est défini comme celui des forces externes et d'inertie. Si le champ de déplacement se réduit à un mouvement de corps rigide, translation et rotation qui n'induisent pas de variation des forces internes, le travail de déformation est nul.

Au sein d'un matériau, isolons un volume  $V$  de matière limité par une surface  $S$  soumis aux efforts virtuels :

- volumiques : inertie  $-\rho \gamma^*$  et externe  $\rho X^*$  regroupés sous la forme de la densité volumique de force  $f^*$  ;
- surfaciques : action  $T^*$  des parties environnantes.

Le travail virtuel de déformation  $W$  dans le champ de déplacement virtuel  $u'$  s'écrit :

$$W = \int_V f^* u' dV + \int_S T^* u' dS$$

Au système de forces  $f^*$ ,  $T^*$  est associé au sein de la matière un tenseur des contraintes  $\sigma$  statiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant en volume l'équation fondamentale de la dynamique  $\text{div } \sigma + f^* = 0$  et en surface les conditions  $T^* = \sigma \cdot n$ .

Au déplacement  $u$  cinématiquement admissible continu et dérivable est associé le tenseur des déformations  $\varepsilon$ .

Le travail de déformation  $W$  peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} W &= \int_V f^* u' dV + \int_S u' \sigma \cdot n dS \\ &= \int_V [ f^* u' + \text{div}(\sigma^*) u' ] dV \\ &= \int_V (f^* + \text{div}(\sigma^*)) u' dV + \int_V \text{Tr}(\sigma^{*t} \text{grad } u') dV \\ &= \int_V \text{Tr}(\sigma^* \varepsilon') dV - \int_V \text{Tr}(\sigma^* \Omega') dV \\ &= \int_V \text{Tr}(\sigma^* \varepsilon') dV \end{aligned}$$

Le travail virtuel de déformation  $W$  peut donc s'écrire soit en terme de forces externes, soit en terme de forces internes :

$$W = \int_V \text{Tr}(\sigma^* \varepsilon') dV = \int_V f^* u' dV + \int_S T^* u' dS$$

et sa densité volumique  $dW/dv$  s'écrit sous la forme :

$$dW/dv = \text{Tr}(\sigma \varepsilon)$$

### III.1.2 Potentiel d'élasticité

Pour une évolution d'un état d'équilibre  $(\sigma, \varepsilon)$  à un état d'équilibre voisin  $(\sigma+d\sigma, \varepsilon+d\varepsilon)$ , selon la variable d'état choisie, on pourra définir deux densités volumiques potentiels :

Avec  $\sigma^* = \sigma$  et  $\varepsilon' = d\varepsilon$ , la densité volumique de potentiel d'élasticité  $\pi(\varepsilon)$  se définit par :

$$d\pi = \text{Tr}(\sigma, d\varepsilon) \quad \sigma = \partial\pi/\partial\varepsilon \quad \sigma_{ij} = \partial\pi/\partial\varepsilon_{ij}$$

Le tenseur de déformation  $\varepsilon$  est alors une variable d'état et sa donnée détermine de manière biunivoque le tenseur des contraintes  $\sigma$ .

Avec  $\varepsilon' = \varepsilon$  et  $\sigma = d\sigma$ , la densité volumique de potentiel complémentaire  $\omega(\sigma)$  se définit par :

$$d\omega = \text{Tr}(\varepsilon, d\sigma) \quad \varepsilon = \partial\omega/\partial\sigma \quad \varepsilon_{ij} = \partial\omega/\partial\sigma_{ij}$$

Le tenseur des contraintes  $\sigma$  est également une variable d'état et sa donnée détermine de manière biunivoque le tenseur de déformation  $\varepsilon$ .

### III.1.3 Définition thermodynamique

Le potentiel d'élasticité indiqué plus haut est de définition purement mécanique et ne peut avoir de relation avec les fonctions thermodynamiques que pour des situations thermiques particulières (essentiellement dans des conditions isothermes et adiabatiques). Il est cependant possible de définir en thermo-élasticité parfaite dans un cadre thermodynamique rigoureux et de situer par rapport à lui les développements précédents. Ce cadre est défini par les deux principes de base de la thermodynamique dont nous donnons une expression eulérienne et locale.

#### Loi de conservation, premier principe

On rappelle que l'équation d'équilibre donnée par l'application de l'axiome d'équilibre du principe des puissances virtuelles au domaine  $D$  s'écrit :

$$P_{(a)} = P_{(i)} + P_{(e)}$$

Cette équation peut être interprétée comme une forme de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$d/dt \left( \int_D \rho v dV \right) - \int_{\partial D} T dS = \int_D f dV$$

La deuxième loi de conservation est la conservation de masse qui s'exprime par :

$$d/dt \left( \int_D \rho dV \right) = 0$$

✓ Premier principe de la thermodynamique

Il constitue la troisième loi de conservation : la conservation de l'énergie. Soit un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  intérieur au milieu matériel  $S$  étudié :

- soit  $E$  son énergie interne,  $e$  l'énergie interne spécifique

$$E = \int_D \rho e dV$$

- soit  $K$  son énergie cinétique  
 $K = \frac{1}{2} \int \rho v \cdot v \, dV$
- soit  $Q$  le taux de chaleur reçue par le domaine  $D$  ; il comprend deux termes : la chaleur créée dans le volume  $D$  par des actions extérieures à  $D$  (chauffage inductif par exemple) et la chaleur reçue par conduction au travers de la frontière  $\partial D$  de  $D$ .

$$Q = \int_D r \, dV - \int_{\partial D} q \cdot n \, dS$$

avec  $r$  la densité volumique de production interne de chaleur à distance,  $q$  le vecteur courant de chaleur,  $n$  la normale extérieure à  $\partial D$ .

Soit  $P_{(e)}$  la puissance réelle des efforts extérieurs :

$$P_{(e)} = \int_D f \cdot v \, dV + \int_{\partial D} T \cdot v \, dS$$

**Le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :**

$$d/dt (E + K) = P_{(e)} + Q$$

$$\text{ou encore } d/dt \left( \int_D \rho \left( e + \frac{1}{2} v \cdot v \right) \, dV \right) = \int_D (f \cdot v + r) \, dV + \int_{\partial D} (T \cdot v - q \cdot n) \, dS$$

En écrivant le deuxième axiome du principe des puissances virtuelles appliqué ici au mouvement réel étudié :

$$P_{(a)} = P_{(e)} + P_{(i)}$$

En remarquant que :

$$P_{(a)} = \int_D \rho \gamma \cdot v \, dV = d/dt \left( \frac{1}{2} \int_D \rho v \cdot v \, dV \right) = dK/dt ; \text{ il vient } dE/dt + dK/dt = dK/dt - P_{(i)} + Q$$

$$\text{avec } Q = \int_D r \, dV - \int_{\partial D} q \cdot n \, dS = \int_D r \, dV - \int_D \text{div} q \, dV$$

$d/dt \int_D \rho e \, dV = \int_D \sigma : D \, dV + \int_D r \, dV - \int_D \text{div} q \, dV$  D'après le lemme fondamental, elle implique :

$$\rho e/dt = \sigma : D + r - \text{div} q \text{ ou dans l'hypothèse des petites perturbations :}$$

$$\rho e/dt = \sigma : \varepsilon + r - \text{div} q$$

### ✓ Entropie, deuxième principe

Après l'énergie interne et le taux de chaleur, il faut introduire encore deux nouvelles variables, la température et l'entropie.

On suppose qu'il est possible de repérer la température par un champ à valeurs scalaires positives défini à chaque instant et en tout point du domaine  $D$  étudié  $T(M,t)$ .

L'entropie exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. On la définit pour un domaine  $D$  à partir d'une densité d'entropie spécifique  $s$  :

$$S = \int_D \rho s \, dV$$

## Le second principe

Il postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température.

$d/dt$  désignant la dérivée particulière :

$$dS/dt \geq \int_D r/T \, dV - \int_{\partial D} (q.n)/T \, dS$$
 ou encore en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_D (\rho ds/dt + \text{div} (q/T) - r/T) dV \geq 0$$

Cette inégalité vérifiée quel que soit le domaine  $D$ , entraîne la forme locale (le second principe) exprimant le taux de production irréversible d'entropie.

$$\rho ds/dt + \text{div} (q/T) - r/T \geq 0$$

L'inégalité fondamentale contenant le second et le premier principe s'obtient en remplaçant  $r$  par son expression tirée de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho ds/dt + \text{div} (q/T) - (\rho de/dt - \sigma : D + \text{div} q)/T \geq 0$$

En remarquant  $\text{div} (q/T) = (\text{div} q)/T - (q \cdot \text{grad} T)/T^2$   
et en multipliant par  $T > 0$ , on en déduit :

$$\rho (T ds/dt - de/dt) + \sigma : D - q \cdot (\text{grad} T)/T \geq 0$$

L'inégalité de *Clausius-Duhem* s'obtient en introduisant une nouvelle variable, l'énergie libre spécifique  $\psi$  définie par :

$$\psi = e - Ts$$

Par dérivation, on écrit le premier terme de l'inégalité fondamentale :

$$d\psi/dt = de/dt - T ds/dt - s dT/dt \text{ ou } T ds/dt - de/dt = (d\psi/dt + s dT/dt)$$

et finalement  $\sigma : D - \rho (d\psi/dt + s dT/dt) - q \cdot (\text{grad} T)/T \geq 0$  ou dans l'hypothèse des petites perturbations

$$\sigma : \varepsilon - \rho (d\psi/dt + s dT/dt) - q \cdot (\text{grad} T)/T \geq 0$$

## III.2 Elasticité

### III.2.1 Elasticité linéaire

En dehors de leur seuil d'écoulement plastique (matériaux ductiles) ou de rupture (matériaux fragiles) les matériaux cristallins présentent une réponse élastique linéaire. Elle se traduit par une relation de proportionnalité entre les tenseurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$ . Dans ce cas les potentiels  $\pi(\varepsilon) = F(\varepsilon)$  et  $\omega(\sigma) = -\Phi(\sigma)$  où  $\Phi$  est le potentiel thermodynamique :  $\Phi = F - \text{Tr}(\sigma\varepsilon)$ , sont égaux et la densité volumique d'énergie élastique stockée s'exprime sous la forme :

$$\pi(\varepsilon) = F = \frac{1}{2} dW/dV = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma\varepsilon)$$

### III.2.1.1 Elasticité linéaire isotrope

On s'intéresse à des particules de matière dont les dimensions sont grandes devant celles des microcristaux. L'isotropie macroscopique du matériau résulte généralement d'une moyenne des propriétés anisotropes des microcristaux constituant la particule, et les propriétés mécaniques élastiques ne dépendent pas de l'orientation au sein de la matière, contrairement au cas des microcristaux ou des composites.

Soumis à un champ de contrainte suffisamment faible pour que ces matériaux restent en deçà de leur seuil de plasticité, les coefficients de la relation contrainte-déformation en régime élastique, les modules élastiques de ces matériaux, sont des constantes indépendantes de l'amplitude de la contrainte appliquée.

Les matériaux isotropes sont caractérisés par **2 modules élastiques indépendants**.

### III.2.1.2 Modules élastiques

#### III.2.1.2.1 Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Young définit vers 1800, en procédant à des essais de traction uniaxiale un coefficient de proportionnalité  $E = \sigma / \varepsilon_1$  avec  $\varepsilon_1$  la déformation mesurée selon l'axe de traction. Poisson complète cette relation en constatant que l'allongement dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il définit le coefficient de proportionnalité ou coefficient de Poisson, de la manière suivante :  $\eta = - \varepsilon_t / \varepsilon_1$  avec  $\varepsilon_t$ , la déformation transversale ;  $\eta$  est compris dans l'intervalle  $[0, 1/2]$ .

#### III.2.1.2.2 Module de Coulomb

Coulomb définit à partir des essais de torsion un coefficient de proportionnalité  $G$  qui est rapport entre le cisaillement appliqué  $\tau$  et le glissement  $\gamma$  ;  $G = \tau / \gamma$

## III.2.2 Equations de l'élasticité

### III.2.2.1 Loi de Hooke

A partir de la définition de  $E$  et  $\eta$  la relation contrainte déformation s'écrit :

$$* \sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 / E \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{vmatrix}$$

Tout état de contrainte se réduisant à un état triaxial dans ses axes principaux, le principe de superposition permet de décomposer  $\sigma$  en trois états de contraintes uniaxiaux orthogonaux, de calculer pour chacun la déformation résultante puis de sommer ces trois déformations pour obtenir le tenseur de déformation  $\varepsilon$  associé à  $\sigma$ . Cette relation tensorielle, établie dans le repère principal, est intrinsèque. Elle s'écrit dans un repère quelconque sous la forme de l'équation de Young :

$$E\varepsilon = -\eta \text{Tr}(\sigma) \delta + (1+\eta) \sigma \text{ ou } E\varepsilon_{ij} = -\eta \sigma_{kk} \delta_{ij} + (1+\eta) \sigma_{ij} ,$$

la relation de Lamé s'écrit :

$$\sigma = \lambda \text{Tr}(\sigma) \delta + (1+\eta) \sigma \text{ ou } \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Les relations entre les modules permettent d'écrire :

$$\sigma = \frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)} \text{Tr}(\varepsilon) \delta + \frac{E}{1+\eta} \varepsilon \text{ avec } \lambda = \frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\eta)}$$

### III.2.2.2 Equation de Lamé

En combinant l'équation d'équilibre dynamique :  $\text{Div} \sigma + \rho X - \rho \gamma = 0$  (avec  $X$  = densité massique de forces externes) vérifiée par le tenseur des contraintes  $\sigma$ , la définition du tenseur de déformation  $\varepsilon$  en terme de déplacement  $u$ , la définition de l'accélération  $\gamma = d^2u/dt^2$  et l'équation d'état du matériau, on obtient, par élimination de  $\sigma$  et  $\varepsilon$  entre ces trois équations, l'équation de Lamé de l'élasticité linéaire isotrope :

$$(\lambda + \mu) \text{Grad} (\text{div} u) + \mu \Delta u + \rho X = \rho (d^2 u) / dt^2$$

## III.3 Ondes et vibrations

La propagation des ondes élastiques résulte de la compétition entre les forces d'inertie et les forces de rappel élastique correspondant à un échange oscillant entre l'énergie cinétique et l'énergie élastique. Un milieu isotrope possède deux modules élastiques caractérisant la compressibilité et la résistance au cisaillement. Il peut propager en volume simultanément mais de manière découplée des ondes de dilatation compression, ondes longitudinales dont la polarisation  $u_L$  (champ de déplacement de la matière induit par le passage de l'onde) est parallèle à la direction de propagation de l'onde et des ondes de cisaillement sans dilatation, ondes transversales dont la polarisation  $u_T$  est perpendiculaire à la direction de propagation.

### III.3.1 Ondes de volume

Considérons un modèle scalaire d'une onde de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $k$  se propageant à la vitesse  $V$  dans la direction  $x$  au sein d'un milieu matériel de module  $E^*$  et de masse volumique  $\rho$  induisant sur son passage un déplacement local de la matière  $u = u_0 \sin \omega(t - x/V)$ ,

la densité volumique d'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \rho (\partial u / \partial t)^2$  prend la valeur maximale  $\frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2$  tandis que la densité volumique d'énergie élastique  $\frac{1}{2} \sigma \varepsilon$  prend, compte tenu du comportement élastique du milieu  $\sigma = E^* \varepsilon = E^* \partial u / \partial x$ , la valeur maximale  $\frac{1}{2} E^* \omega^2 (u_0/V)^2$ . L'égalité des valeurs maximales de ces deux formes d'énergie conduit à la forme générale de la vitesse du son :

$$V = \sqrt{E^* / \rho}$$

Les vitesses typiques de propagation du son dans les solides sont l'ordre de quelques milliers de mètres par seconde.

Dans un milieu élastique isotrope de dimensions caractéristiques  $D$  grandes devant la longueur d'onde  $\lambda$ , ( $\lambda \ll D$ ), et en l'absence de forces de volumes  $X = 0$  l'équation de Lamé du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \text{Grad} (\text{div} u) + \mu \Delta u &= \rho (d^2 u) / dt^2 \text{ ou} \\ (\lambda + \mu) \text{Rot} (\text{Rot} u) + (\lambda + 2\mu) \Delta u &= \rho (d^2 u) / dt^2 \end{aligned}$$

### III.3.2 Ondes longitudinales

Ce sont des ondes de compression– traction induisant un déplacement de la matière  $u_L$  dans la direction de propagation définie par le vecteur d'onde  $k$ . La divergence du champ de déplacement  $u_L$  n'est pas nulle, traduisant des variations locales de volume au passage de l'onde. Par contre le rotationnel du champ de déplacement  $u_L$  est nul.

$u = u_L + u_T$ ;  $\text{Rot} u_L = 0$  ce qui implique que l'équation de propagation des ondes longitudinales se réduisent à :  $(\lambda + 2\mu) \Delta u = \rho (d^2 u) / dt^2$

La vitesse de propagation est :  $V = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = \sqrt{E^*/\rho}$  avec  $E^* = E \frac{1-\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}$

### III.3.3 Ondes transversales

Ce sont des ondes cisaillement induisant un déplacement de la matière  $u_T$  perpendiculaire à la direction de propagation définie par le vecteur d'onde  $k$ . La divergence du champ de déplacement  $u_T$  est nulle, traduisant une absence de variation locale de volume au passage de l'onde. Par contre le rotationnel du champ de déplacement  $u_L$  est nul. L'équation de propagation des ondes s'écrit :

$$\mu \Delta u = \rho (d^2 u) / dt^2$$

et la vitesse de propagation transversale est :

$$V = \sqrt{\mu/\rho} = \sqrt{E^*/\rho}$$

Le rapport des vitesses longitudinale et transversale donne :

$$V_T/V_L = \sqrt{(1-2\eta)/(2(1-\eta))}$$

## III.4 Théorèmes énergétiques

Ces théorèmes ne s'appliquent que lorsque le matériau a un comportement parfaitement élastique linéaire.

### III.4.1 Formule de Maxwell-Betti

En élasticité linéaire, dans le cas habituel où les efforts extérieurs appliqués aux structures sont prépondérants (force de volume et poids propre négligeables), le travail de déformation d'une structure de volume  $V$  se réduit au travail des forces extérieures appliquées sur sa surface  $S$  dans le champs de déplacement élastique  $u$ . L'énergie élastique stockée s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} W = \frac{1}{2} \int_V \text{Tr}(\sigma \varepsilon) dV = \frac{1}{2} \int T u dS$$

Théorème : pour deux états d'équilibre d'une même structure élastique, le travail des sollicitations extérieures du premier état dans le champ de déplacement du second est égal au travail des sollicitations extérieures du second état dans le champ de déplacement du premier.

$$\text{Tr}(\sigma_1 \varepsilon_1) = \text{Tr}(\sigma_2 \varepsilon_2)$$

### III.4.2 Théorème de Castigliano

L'énergie élastique  $U$  d'une structure supportant des charges  $Q$  appliquées aux points  $X$ , est une fonction quadratique des  $Q(X)$  et la relation  $u(X) = \partial U / \partial Q(X)$  détermine le déplacement  $u$  au point  $X$  à l'aplomb de la charge  $Q$ .

Le théorème de Castigliano permet de calculer en tout point le champ de déplacement induit par un chargement  $Q$  par application de la méthode dite de la charge fictive. En effet, en appliquant au point  $x$  la charge  $P$ , l'énergie  $U$  devient une fonction quadratique des  $Q(X)$  et de  $P(x)$ .

Le déplacement  $u$  au point  $x$ , fonction de  $P$  et de  $Q$  est donné par :

$$u(x) = \frac{\partial U(Q, P)}{\partial P}$$

### III.4.3 Formule de Ménabréa

Pour un problème hyperstatique où le nombre de réactions d'appuis inconnues  $R_j$ , est supérieur au nombre d'équations de la statique et ne permet pas d'exprimer toutes les réactions en fonction de la géométrie de la structure et des charges extérieures  $Q_i$  l'énergie de la structure est de la forme  $U^E = f(Q_i, R_j)$ . L'équilibre correspondant au minimum de cette énergie, les réactions d'appuis seront déterminées par les relations :

$$u_j = \frac{\partial U^E}{\partial R_j} = 0$$

### III.5 Flexion et le flambement

#### III. 5.1 Flexion des poutres

Flexion d'une poutre console



La force qui tend à faire fléchir la poutre induit à l'encastrement un moment  $M = FL$  qui tend à le faire pivoter dans le sens des aiguilles d'une montre. Le torseur  $R_E, M_E$  des réactions d'encastrement se compose donc d'une réaction  $R_E$  et d'un moment  $M_E$  tels que :

$$\begin{aligned} \text{Résultante } R_E - F &= 0 \text{ ou } R_E = F \\ \text{Moment } M_E + M &= 0 \text{ ou } M_E = FL \end{aligned}$$

Moment de flexion  $M(x)$

Dans une section droite d'abscisse  $x$ , l'action de la partie droite de la poutre se traduit par un torseur d'efforts  $R(x), M(x)$  donné par :

$$\begin{aligned} \text{Effort tranchant } R_x &= F \\ \text{Moment fléchissant } M_x &\text{ de module } F(L-x) \end{aligned}$$

Déformée  $y(x)$

L'équation différentielle de la déformée s'écrit :

$$EI/R = M(x) ; EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x) = -F(L-x)$$

Par intégration la pente s'écrit :  $EI \frac{dy}{dx} = -Fx(L-x/2)$

La résolution de cette équation donne:

$$EI y = -1/2 Fx^2 (L-x/3) \text{ et la flèche } \delta = y(L) = FL^3 / 3 EI$$



Les contraintes  $\sigma(x,y) = M(x) y/I = Fy/I (L-x)$  ;  $\varepsilon(x,y) = \sigma/E = M(x) y/EI = (F/EI)y(L-x)$

Energie élastique :  $U^E = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = F^2/2EI^2 \int_V y^2 (L-x)^2 dV = F^2/2EI \int_0^L (L-x) dx = \frac{F^2 L^3}{6EI}$

### III.5.2 Flambement des poutres

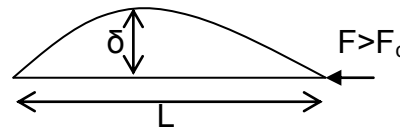
Les matériaux ne cèdent pas de la même façon suivant qu'ils travaillent en tension ou en compression. Lorsqu'un élément travaille en tension qu'il s'agisse d'une corde ou d'une tige d'acier, il s'étire tout restant rectiligne et la rupture survient généralement à l'endroit le plus faible de l'élément.

Le comportement des matériaux vis-à-vis d'une compression dépend de leur longueur. Une courte tige de métal, un petit mur de brique conservera sa forme sous compression jusqu'au moment où se produira un phénomène de destruction par écrasement local. Pour une même force de compression, une tige plus longue mais de même section, un mât de bateau ou un mur plus haut, se courbera avant de rompre.

La flexion d'un solide rectiligne et allongé sous l'effet de forces qui le compriment suivant sa longueur est une instabilité mécanique appelée flambage ou flambement.

#### Charge critique de flambement

Lors de la compression d'une tige par une force  $F$ , la structure commence par se comprimer jusqu'à une force critique  $F_c$  au-delà de laquelle la configuration flambée est énergiquement plus favorable. Le flambage est analogue à la flexion dont il se distingue par l'existence de la force seuil  $F_c$ .



Considérons, comme état de référence, une tige de longueur  $L$ , de moment d'inertie  $I$  et de module d'Young  $E$  comprimée par la force  $F_c$  au seuil de la transition entre la compression et le flambement.

Juste au-delà du seuil de flambement  $F \approx F_c$  la déformée caractérisée par sa flèche est régie par l'équation de flexion  $EI/R = -M(x)$ .

En estimant la courbure  $1/R \approx (d^2y)/dx^2 \approx \delta/L^2$  et le moment fléchissant  $M \approx F_c \delta$  ; la charge critique de flambage est donnée par :

$$F_c \approx EI/L^2$$

#### Charge critique d'Euler

La force de compression axiale  $F_c$  susceptible de « provoquer ? » le flambage d'une tige ou d'une colonne calculée exactement par le mathématicien suisse Léonard Euler (1707-1783) est :

$$F_c = kEI/L^2 = (\pi^2 EI)/L_{eff}^2$$

$K$  étant une constante sans dimension qui dépend des degrés de liberté des extrémités de la tige et  $L_{eff}$  la longueur de la poutre en appuis simples admettant la même charge critique  $F_c$ .

Appuis	Charge d'Euler $F_c$	Longueur $L_{eff}$
Simple - simple	1	L
Encastré - encastré	4	$\frac{1}{2} L$
Encastré - simple	2,04	0,7 L
Encastré - libre	$\frac{1}{4}$	2L

Tableau 3.1: Valeurs de k et  $L_{eff}$  pour quelques types d'appui

## CHAPITRE IV. PLASTICITE

### IV.1 Comportement plastique

Le comportement plastique est celui d'un corps solide qui prend des déformations permanentes sans se fissurer. On admet généralement que ces déformations permanentes se produisent au-delà d'un seuil de contrainte appelé seuil de plasticité ou limite d'élasticité.

#### IV.1.1 Seuil de plasticité

Le seuil de plasticité doit être vu comme une schématisation commode. Au-delà du seuil, les déformations permanentes deviennent beaucoup plus importantes que les déformations élastiques. La définition du seuil est conventionnelle. La limite d'élasticité vraie (point A) définie par la valeur  $\sigma_v$  qui produit une déformation permanente dans le premier grain de la microstructure du matériau est inaccessible à la mesure expérimentale. Lorsque le nombre de grains plastifiés augmente la déformation permanente devient accessible à la mesure. Elle est définie comme la déformation  $\epsilon_p$  mesurée après une décharge élastique (trajet BC) qui récupère la partie de déformation élastique  $\epsilon_e$ , les propriétés élastiques (modules élastiques) étant supposées raisonnablement non modifiées par le très faible taux de plastification subi par le matériau (identité des pentes des trajets OA et BC). A cette déformation définie conventionnellement par  $\epsilon_p = 2 \cdot 10^{-2}$  correspond le seuil d'élasticité conventionnelle  $\sigma_c$  ( $\epsilon_p$ ) appelé seuil de plasticité. En pratique le seuil de plasticité est appelé limite d'élasticité  $\sigma_e$  du matériau.

En général la résistance à la déformation plastique dépend plus ou moins, selon les matériaux et la température, de la vitesse de déformation (*visco-plasticité*) et de l'histoire des déformations permanentes déjà subies par le matériau soit au cours du processus d'élaboration, soit au cours de sollicitations antérieures (*écrouissage*). On constate expérimentalement que lorsqu'un solide a été soumis à une contrainte non isotrope, il possède vis-à-vis d'un nouveau chargement un seuil égal à la plus grande valeur de la décharge antérieure.

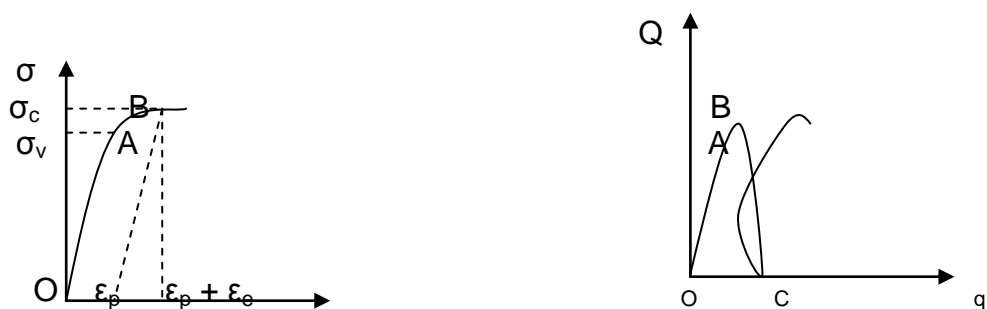


Fig. 4.1 : Seuil de plasticité

#### IV.1.2 Influence des déformations plastiques sur les propriétés mécaniques

Des déformations plastiques modérées n'entraînent pas de changement des modules d'élasticité dans les corps compacts. Leurs effets sont : le durcissement, la ductilité et l'effet Bauschinger.

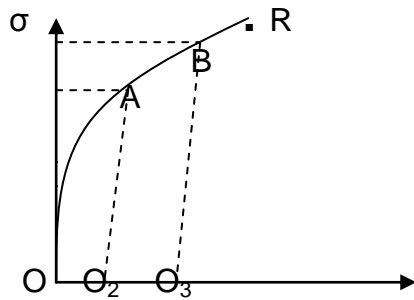
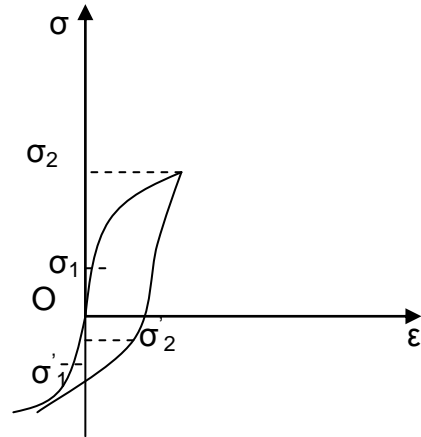


Fig. 4.2: durcissement, effet Bauschinger



Le durcissement correspond à une élévation du seuil de plasticité pour des contraintes de même nature et de même signe que celles qui ont produit l'écoulement plastique. Sa fonction de charge s'écrit :  $\sigma = f(\epsilon)$  ; cette fonction est non décroissante de  $\epsilon$  traduisant le durcissement du matériau. On a  $d\sigma/d\epsilon > 0$ .

La réduction de la ductilité est la diminution de l'allongement possible avant la rupture. La position du point de rupture n'est pas modifiée par les décharges  $AO_2$ ,  $BO_3$ , ..

L'effet Bauschinger : on observe généralement une diminution (en valeur absolue) du seuil de plasticité pour des contraintes de même nature mais de signes opposés à celles qui ont produit la déformation plastique ; soit  $|\sigma'_2| < |\sigma_1|$

### IV.1.3 Comportement plastique pur

Dans la pratique la vitesse de déformation est suffisamment lente pour que l'on puisse négliger les effets de frottement interne : absence de déformation différée. La plasticité pure est indépendante du temps.

#### L'élasto-plasticité

Elle correspond au cas où le seuil d'écoulement est une constante matérielle indépendante de la valeur de déformation plastique atteinte. L'écrouissage ou le durcissement est nul.

Le modèle élasto-plastique qui sera dans la suite exposé est construit en se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP).

Le schéma de comportement étudié dans ce cours, laisse de côté, en ce qui concerne la plasticité, tout effet de vieillissement et de viscosité du matériau. Du point de vue des formules mathématiques par lesquelles on représente le comportement plastique, cela implique les conséquences suivantes :

- découlant classiquement de l'absence de vieillissement, invariance par translation sur la variable temps ;
- par suite de l'absence de viscosité, la réponse (déformation) du matériau à la variation élémentaire de sollicitation (contrainte) effectuée à un instant donné, se produit en totalité simultanément à cette variation et est indépendante de la vitesse avec laquelle celle-ci est effectuée : il y a invariance des formules exprimant le comportement, par homothétie positive effectuée à chaque instant sur la variable temps.

Il résulte de cela que les formules exprimant le comportement élasto-plastique sans vieillissement ni viscosité, ne saurait dépendre explicitement ou implicitement du temps physique ; la réponse du matériau à une certaine histoire de sollicitation ne

dépend que de la séquence des évènements de cette histoire. Aussi, fera t-on usage pour écrire commodément les relations de comportement en plasticité classique, d'un temps, paramètre purement cinématique monotone croissante fonction du temps physique ; il en ira de même pour l'étude des problèmes d'élasto-plasticité quasi-statique.

Ce chapitre est organisé de façon à présenter les deux concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie le modèle de comportement plastique classique :

- le critère de plasticité, généralisant la notion de seuil de plasticité mise en évidence dans les expériences en sollicitations uniaxiales (traction simple par exemple) ;
- la règle ou loi d'écoulement plastique qui définit, dans le cas des sollicitations multiaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique.

Ces deux concepts ne sont pas totalement indépendants mais doivent être soigneusement distingués.

## IV.2 Critères de plasticité

### IV.2.1 Expérience de traction simple

La figure 4.3 ci-dessous représente le diagramme contrainte-déformation relevé dans une expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette en acier inoxydable.

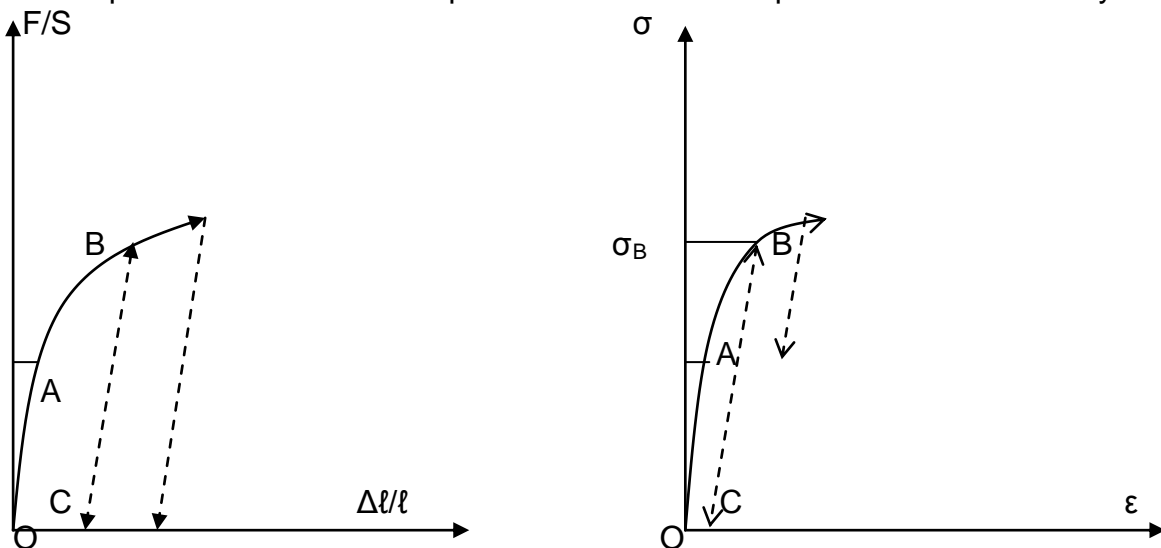


Fig 4.3 : Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable

L'expérience de traction est effectuée à vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  fixée. On constate sur la figure 4.3 ci-dessus, l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit  $\sigma_0$ , à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible ; l'éprouvette ayant été chargée au-delà de A jusqu'en B, on effectue une décharge : celle-ci suit sur le diagramme, le chemin BC et non le trajet BAO. En particulier, on note qu'après décharge totale, il reste une déformation de l'éprouvette  $\epsilon^p$  représentée par OC sur la figure : C'est la déformation permanente. On procède alors à une nouvelle charge : tant que la contrainte reste inférieure à  $\sigma_B$  celle-ci s'effectue en suivant le trajet CB identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge : le comportement demeure réversible tout au long de CB. Quand  $\sigma$  dépasse  $\sigma_B$ , le point figuratif est la courbe de première charge au-delà de B, c'est à dire la courbe

représentant la traction sans décharge. Ainsi, lors de la nouvelle charge effectuée à partir de C,  $\sigma_B$  apparaît comme le nouveau seuil en traction :  $\sigma_0$  est appelé seuil de plasticité initiale (ou limite d'élasticité initiale) ;  $\sigma_B$  est le seuil de plasticité actuel (ou limite de plasticité actuelle).

Pour certains matériaux le diagramme contrainte-déformation, homologue de celui de la figure 4.3 dépend dans sa partie irréversible, de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  adoptée.

Il peut aussi dépendre dans sa partie irréversible de l'âge du matériau, c'est à dire de l'instant  $t_0$  repéré par rapport à l'histoire du matériau, auquel est effectuée l'expérience. Comme nous l'avons dit plus haut, le modèle de comportement élasto-plastique classique laisse de côté tout effet de viscoplasticité et de vieillissement : le comportement du matériau est alors schématisé par la courbe unique de la figure 4.3 indépendante de  $t_0$  et de  $\dot{\epsilon}$  (ou ce qui revient au même, de  $\sigma$ ).

Le phénomène observé à la figure 4.3, où le seuil de plasticité actuel  $\sigma_B$  est effectivement une fonction de  $\epsilon^p$  correspond au cas du matériau dit écrouissable ; on précise même dans certains cas un matériau à écrouissage positif pour traduire le fait que le seuil de plasticité est une fonction croissante de  $\epsilon^p$ .

Ce phénomène n'est pas général pour le comportement plastique. Dans le cas d'une expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux, on constate que le diagramme contrainte-déformation présente un palier pour des déformations allant de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$ . Un tel comportement est modélisé selon le diagramme de la figure 4.4a avec un palier illimité et l'on dit que le matériau correspondant est élastique et parfaitement plastique. Ainsi, pour ce matériau, la contrainte ne peut dépasser la valeur  $\sigma_0$  et lorsqu'elle atteint la valeur  $\sigma_0$  il y a possibilité d'allongement illimité.

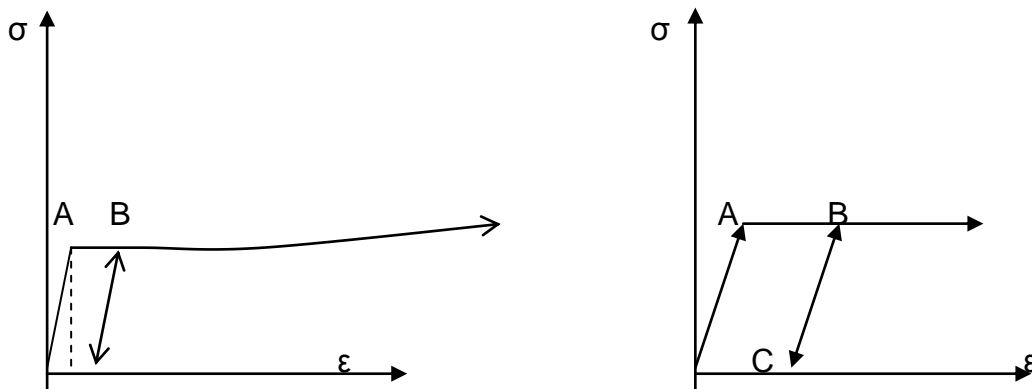
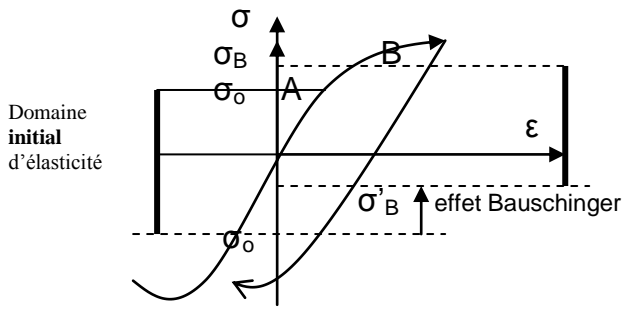


Figure 4. 4 a : Acier doux      Figure 4.4b : Représentation schématique  
Expérience de traction simple pour un matériau élastique parfaitement plastique.

Dans le cas d'un matériau écrouissable, après décharge suivant BC, si l'on sollicite la même éprouvette en compression ; on constate alors que le seuil de plasticité en compression, initialement égal à  $-\sigma_0$  , se trouve ramené à la valeur  $\sigma_B$ , supérieure algébriquement à  $-\sigma_0$

L'écrouissage en traction qui correspond à un relèvement du seuil de plasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) du seuil de plasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Bauschinger.



Domaine d'élasticité  
actuel

Figure 4.5 : Expérience de traction-compression :  
effet Bauschinger

### IV.2.2 Sollicitation multiaxiale, domaines d'élasticité

#### IV.2.2.1 Généralités

L'expérience de traction monoaxiale évoquée ci-dessus ne représente qu'un cas de sollicitations que peut subir un milieu continu tridimensionnel. D'une manière générale, une sollicitation quelconque d'un élément de matière est caractérisée par le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  (ou  $\sigma$ ; tenseur de Cauchy). Par des résultats expérimentaux, on met en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité initial contenant l'origine et tel que pour tout trajet de charge de l'élément de matière, partant de l'état naturel et situé entièrement à l'intérieur de ce domaine, les déformations sont élastiques. Ce domaine est ainsi défini dans l'espace  $(R^9)$  ou  $(R^6)$  en tenant compte des symétries, des tenseurs de contraintes.

Dans le cas de la sollicitation uniaxiale évoquée plus haut, le domaine d'élasticité initial apparaît comme l'homologue du segment  $[-\sigma_0, +\sigma_0]$  tracé sur l'axe des contraintes.

#### IV.2.2.2 Matériau écrouissable

Dans le cas d'un matériau écrouissable, la charge peut être poursuivie au-delà du domaine d'élasticité initial ; le point de charge  $\sigma$ , ayant atteint la frontière d'élasticité initiale, peut franchir celle-ci : il y a alors apparition de déformations permanentes. On définit en chaque point du trajet de charge, le domaine d'élasticité actuel : le domaine d'élasticité actuel correspondant à un point B et à un trajet de charge donné aboutissant en B est, par définition, le domaine  $(R^6)$  engendré par l'ensemble des trajets de charge issus de B le long desquels la déformation varie de façon purement élastique.

Lorsque le point de charge franchit la frontière d'élasticité initiale, il entraîne avec lui la frontière du domaine d'élasticité actuel, comme cela est représenté sur la figure 4.6.

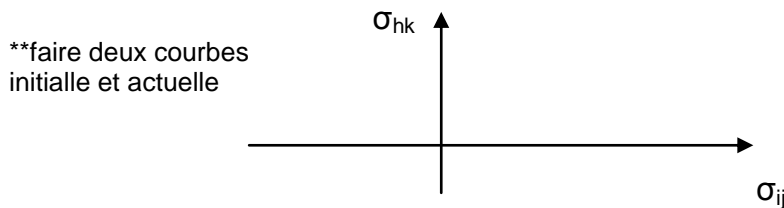


Fig. 4.6 : Domaines d'élasticité initial et actuel pour le matériau écrouissable

#### IV.2.2.3 Matériau parfaitement plastique

Pour un matériau parfaitement plastique, le domaine d'élasticité n'est pas modifié par l'apparition des déformations plastiques. Il s'agit ici d'un domaine fixe : le point de

charge  $\sigma$  ne peut sortir de ce domaine ; les déformations plastiques ne se produisent que si  $\sigma$  est sur la frontière d'élasticité et y demeure

\*\*Faire une courbe

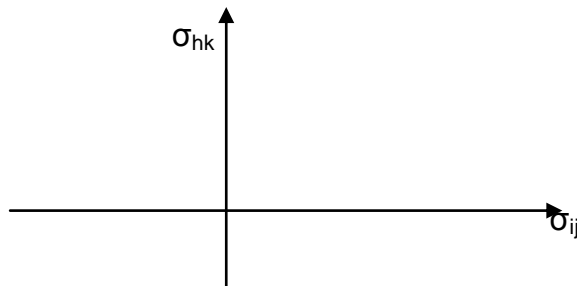


Figure 4.7 : Domaine d'élasticité pour le matériau parfaitement plastique

Le domaine d'élasticité étant supposé fixe, il n'y a en particulier pas d'effet Bauschinger pour ce type de matériau.

### IV.2.3 Critères de plasticité

Il est d'usage, pour définir le domaine d'élasticité (initiale ou actuel) d'introduire une fonction scalaire  $f$  de  $\sigma$ , appelée fonction de charge du matériau, et telle que :

$f(\sigma) < 0$  correspond à l'intérieur du domaine

$f(\sigma) = 0$  à la frontière

$f(\sigma) > 0$  à l'extérieur du domaine.

On appellera :

- critère d'élasticité, la condition :  $f(\sigma) < 0$ ,
- critère de limite d'élasticité, ou critère de plasticité, la condition  $f(\sigma) = 0$

Connaissant à partir des résultats expérimentaux, le domaine d'élasticité, la formule ci-dessus est insuffisante pour déterminer  $f$ .

On remarque par exemple que  $f$  n'est définie que sur l'espace  $R^6$  des tenseurs  $\sigma$  symétriques : aussi son expression en fonction des 9 composantes de  $\sigma$  supposées distinctes est-elle indéterminée. Sauf mention contraire, on désignera par  $f$ , une expression de la fonction de charge en fonction des 9 composantes de  $\sigma$  de forme symétrique  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

On introduit pour définir le domaine d'élasticité d'un matériau écrouissable, l'état d'écrouissage, dans la fonction de charge. Ainsi, on écrira :  $f(\sigma, E)$  au lieu de  $f(\sigma)$ . On note  $C(E)$  le domaine d'élasticité actuel. Le domaine d'élasticité actuel n'est modifié que lorsque, le point de charge étant sur sa frontière, la variation de charge est dirigée vers l'extérieur de celle-ci. Il est résulte que l'état d'écrouissage n'évolue que lorsqu'il y a évolution de la déformation plastique. Diverses théories ont été construites qui tendent à substituer à l'état d'écrouissage des paramètres scalaires ou tensoriels. On peut citer :

- la théorie d'écrouissage « isotrope » de Taylor et Quinney (1931), dépendant d'un paramètre scalaire unique ; le domaine d'élasticité se transforme par homothétie de centre O au fur et à mesure de l'écrouissage.



Exemple :  $f(\sigma, E) = f(\sigma) - h(E)$ .  $E$  étant un paramètre scalaire.

Pour un écrouissage positif,  $E$  est positif et  $h$  est une fonction croissante de  $E$  ;

- la théorie de l'écrouissage « cinématique » de Prager (1958, 1962) où les frontières successives se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes ; l'écrouissage dépendant alors d'un paramètre tensoriel.

Exemple :  $f(\sigma, E) = f(\sigma - E)$  ;  $E$  étant un paramètre tensoriel de même ordre que  $\sigma$ .

Un écrouissage cinématique linéaire se traduit par une simple translation du domaine d'élasticité, sans rotation ni déformation.

#### **IV.2.4 Critères de plasticité usuels**

##### IV.2.4.1 Convexité

L'expérience a montré que pour la quasi-totalité des matériaux (ceux constitués d'une seule phase), les domaines d'élasticité initial et actuel sont convexes. La convexité du domaine d'élasticité  $C$  implique que la fonction de charge  $f$  doit être convexe de  $\sigma$  aux points de frontière  $C$  c'est à dire vérifiant  $f(\sigma) = 0$ . On peut alors choisir  $f$  convexe de  $\sigma$ ,  $\forall \sigma$  ;  $f$  satisfait donc :

$$f[\lambda \sigma_1 + (1-\lambda) \sigma_2] \leq \lambda f(\sigma_1) + (1-\lambda) f(\sigma_2) \quad \forall \lambda \in (0,1), \quad \forall \sigma_1, \quad \forall \sigma_2$$

##### IV.2.4.2 Symétries matérielles

Les domaines d'élasticité et donc les critères de limite d'élasticité satisfont au principe de respect des symétries de la matière. Cela signifie que si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux tenseurs contraintes déduits l'un de l'autre par une transformation appartenant au groupe des symétries de la matière dans son état actuel, les positions de  $\sigma$  et de  $\sigma'$  par rapport au domaine d'élasticité actuel sont indiscernables ; autrement dit, le domaine d'élasticité actuel est invariant dans son état actuel ; de même, pour le critère  $f$ .

##### IV.2.4.3 Cas du matériau isotrope

En particulier pour un matériau isotrope dans son état initial et dont on suppose l'isotropie conservée par la déformation élastique, le critère de limite d'élasticité initiale est une fonction isotrope de  $\sigma$  ; c'est à dire que  $f$  est une fonction symétrique des contraintes principales, ou encore, de façon équivalente que  $f$  est une fonction des seuls invariants principaux de tenseur  $\sigma$ . Si l'isotropie est conservée au cours de l'écrouissage, le critère actuel est lui aussi une fonction symétrique des contraintes principales.

Le domaine d'élasticité pour le matériau isotrope peut être représenté dans l'espace  $R^3$  des contraintes principales. Il admet dans cet espace, les 3 plans bissecteurs des axes comme plan de symétrie.

##### IV.2.4.4 Critère de Tresca

Ce critère fut introduit par H. Tresca en 1868 à la suite d'expériences sur le plomb. La fonction de charge correspondante s'écrit :

$$f(\sigma) = \sup \{ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 / i, j = 1, 2, 3 \}$$

( $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  : contraintes principales)

$\sigma_0$  apparaît comme la limite d'élasticité en traction simple ; elle est égale à la limite en compression simple (au signe près). Dans l'espace  $R^3$  des contraintes principales, le domaine d'élasticité du matériau est un prisme hexagonal régulier d'axe  $(1,1,1)$ .

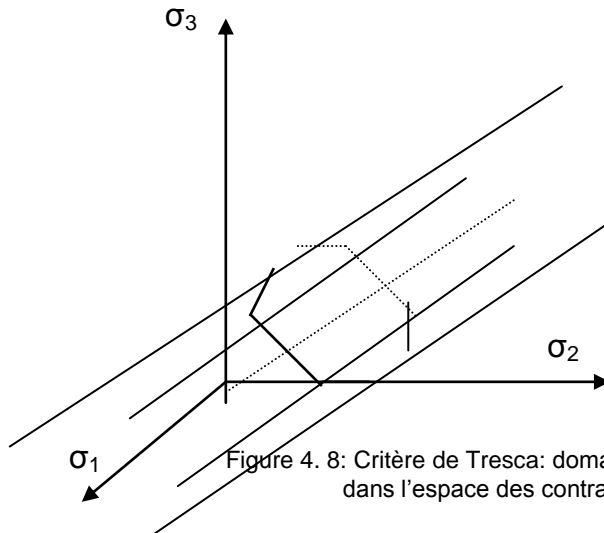


Figure 4. 8: Critère de Tresca: domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes

Pour un matériau écrouissable, on peut écrire  $f(\sigma, E)$  sous la forme  $f(\sigma, E) = \sup (\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0(E) / i, j = 1, 2, 3)$ ,  $\sigma_0$  dépendant de l'état d'écrouissage ; on a alors un écrouissage isotrope. On peut aussi écrire  $f(\sigma, E)$  sous la forme :  $f(\sigma, E) = \sup \{ [ \sigma \dots (E) ]_i - [ \sigma \dots (E) ]_j - \sigma_0 / i, j = 1, 2, 3 \}$

L'écrouissage obtenu est appelé écrouissage cinématique, défini par le paramètre tensoriel  $(E)$ ; en général il ne conserve pas l'isotropie du matériau.

Remarques:

- a) le critère de Tresca est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes et ne dépend que du déviateur des contraintes, tenseur  $s$  défini à partir de  $\sigma$  par :  $s = \sigma - 1/3 (\text{tr } \sigma) \mathbf{1}$  ( $s$  est de trace nulle). Il revient aussi à dire que le critère de Tresca est insensible à l'effet d'une pression hydrostatique (positive et négative). Cette propriété a été observée expérimentalement pour de nombreux matériaux.
- b) il n'existe pas, pour le critère de Tresca, de fonction de charge s'exprimant de façon polynomiale en fonction des invariants de  $\sigma$  ou de  $s$  ; il suffit, pour s'en convaincre de remarquer que la frontière de  $C$  est un prisme hexagonal, c'est à dire une surface de  $R^3$  possédant six arêtes de points singuliers. De ce point de vue l'expression :  $4J_2^3 - 27 J_3^2 - 9 \sigma_0^2 J_2^2 - \sigma_0^6$ , proposée par certains auteurs n'est pas exacte ( $J_2$  et  $J_3$  y représentant les invariants de  $s$  définis ci-dessous ; cette expression correspond à la fonction :  $(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_0) (\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_0) \dots (\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0) (\sigma_0 - \sigma_j - \sigma_0) \dots (\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_0)$ , qui n'est pas une fonction de charge pour le convexe de Tresca.

#### IV.2.4.5 Critère de VON MISES

Comme le critère de Tresca, il s'agit d'un critère valable pour les matériaux isotropes. Il est également indépendant de la composante sphérique du tenseur des contraintes. La fonction de charge ne dépend donc que de  $s$ .

D'une manière générale, pour un matériau isotrope,  $f$  qui est fonction des invariants de  $\sigma$  s'exprime de façon équivalente comme une fonction de  $I_1 = \text{tr } \sigma = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , premier invariant de  $\sigma$ , et des invariants non nuls de  $s$  définis par :

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr} (s^2) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = -s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_3 s_1.$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \text{tr} (s^3) = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

On rappelle que les deux autres invariants de  $\sigma$  s'écrivent :

$$I_2 = \frac{1}{2} [ (\text{tr} (\sigma))^2 - \text{tr} (\sigma^2) ] = \frac{1}{2} [ \sigma_{kk}^2 - \sigma_{kk} - \sigma_{ij} \sigma_{ij} ] = \frac{1}{2} [ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) ]$$

$$I_3 = \det |\sigma| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Si  $f$  est indépendante de la partie sphérique de  $\sigma$  et ne dépend que de  $s$ , elle s'exprime en fonction des seuls invariants  $J_2$  et  $J_3$ .

Le critère de VON MISES correspond pour un critère de ce type, à la forme la plus simple. La fonction de charge s'écrit :  $f(\sigma) = J_2^{1/2} - k$ ;  $k$  apparaît comme la limite d'élasticité en cisson simple. La limite en traction simple est égale à  $k\sqrt{3}$  (celle en compression simple à  $-k\sqrt{3}$ ).

Ce critère est parfois appelé critère de la cisson octaédrale (la contrainte octaédrale est celle qui s'exerce sur un plan normal à la trisectrice du repère principal des contraintes); on en donne aussi une interprétation énergétique.

Dans l'espace  $R^3$  des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ ); le domaine d'élasticité du matériau est un cylindre circulaire droit, d'axe  $(1,1,1)$  et de rayon  $k\sqrt{2}$  (voir figure 4.9).

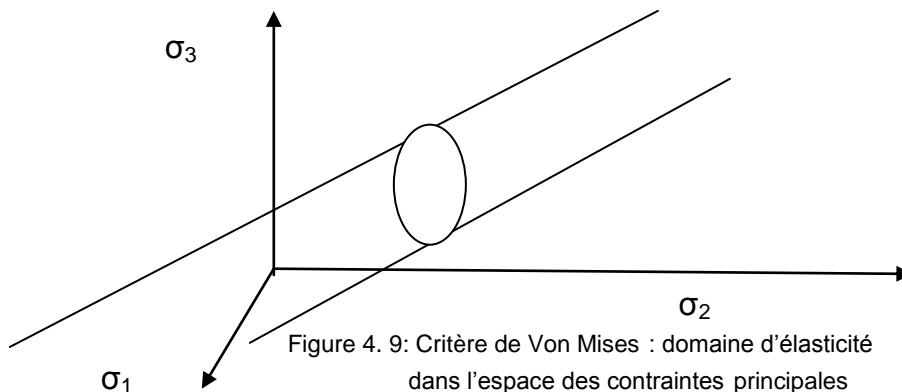


Figure 4. 9: Critère de Von Mises : domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales

De même que dans le cas du critère de Tresca, pour un matériau écouissable on écrira  $f(\sigma, E)$  sous la forme :

$f(\sigma, E) = J_2^{1/2} - k(E)$ , on a alors un écouissage isotrope. On peut aussi écrire  $f(\sigma, E)$  sous la forme :

$f(\sigma, E) = [ \frac{1}{2} (s_{ij} - a_{ij}(E)) (s_{ji} - a_{ji}(E)) ]^{1/2} - k$ , c'est l'écouissage cinématique défini par le paramètre tensoriel  $a(E)$ : il ne conserve l'isotropie du matériau que si  $a$ , a mêmes directions principales que  $\sigma$ .

Les lois d'évolution des paramètres d'écouissage  $k$  et  $a$  devront évidemment être données, en fonction de l'évolution de la déformation plastique.

Il est utile pour les applications pratiques de donner l'expression de la fonction de charge de VON MISES, en fonction des contraintes principales :

$$f(\sigma) = \left\{ \frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}^{1/2} - k$$

#### IV.2.4.6 Critères du type « courbe intrinsèque »

##### IV.2.4.6.1 Présentation

Le critère de Tresca présente deux propriétés importantes :

- il ne fait intervenir que les contraintes principales extrêmes ;
- seule la différence entre ces deux contraintes intervient.

En ordonnant les contraintes principales selon :

$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$  (tractions positives), la fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0$$

Une généralisation de ce critère a été proposée par Mohr et par Caquot dans laquelle la différence  $(\sigma_I - \sigma_{III})$  est comparée, non plus à une constante, mais à une fonction de  $\sigma_I + \sigma_{III}$ . Il y a une dépendance de la fonction de charge vis-à-vis de la partie sphérique de  $\sigma$ , appelée aussi contrainte moyenne.

On a alors :

$$f(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} - g(\sigma_I + \sigma_{III}) ;$$

Pour le tenseur des contraintes  $\sigma$ ,

$R = (\sigma_I - \sigma_{III})/2$ , est le rayon du cercle de Mohr, et

$-p = (\sigma_I + \sigma_{III})/2$ , est l'abscisse du centre de ce cercle.

La fonction de charge pour ce type de critère peut se mettre sous la forme  $f(\sigma) = R - R(p)$ . Ainsi la fonction d'état limite  $f(\sigma) = 0$  exprime une relation entre le rayon du cercle de Mohr correspondant à  $\sigma$  et l'abscisse du centre de ce cercle. Les cercles de Mohr limites ont donc une enveloppe. Pour cette raison ce type de critère est en général présenté par la donnée graphique de l'enveloppe (supposée réelle) des cercles de Mohr limites : c'est la courbe intrinsèque d'équation :

$$|t| = h(\sigma).$$

Pour le critère de Tresca, la courbe intrinsèque se compose de deux droites parallèles à l'axe  $\sigma$ .

##### IV.2.4.6.2 Forme du domaine d'élasticité

Le domaine d'élasticité pour un matériau régi par un critère de type courbe intrinsèque se représente comme tout matériau isotrope, dans l'espace  $R^3$  des seules contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ; il y admet les trois plans bissecteurs des axes comme plans de symétrie.

Dans le 1/6 d'espace défini par  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$ , la fonction de charge s'écrit  $f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_2 - g(\sigma_1 + \sigma_2)$ , indépendante de  $\sigma_3$ . Cela signifie que dans le 1/6 d'espace, la frontière du domaine d'élasticité est une surface cylindrique, parallèle à l'axe  $\sigma_3$  dont la directrice dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  a pour équation :

$$\sigma_1 - \sigma_2 - g(\sigma_1 + \sigma_2) = 0, \sigma_1 \geq \sigma_2$$

Le domaine d'élasticité est dans ce 1/6 d'espace, « l'onglet » délimité par les plans bissecteurs  $\sigma_1 = \sigma_3$  et  $\sigma_3 = \sigma_2$  dans le cylindre d'équation :

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 - g(\sigma_1 + \sigma_2) \leq 0 \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \end{cases}$$

#### IV.2.4.6.3 Convexité du domaine d'élasticité

Pour que le domaine d'élasticité soit convexe, il faut que les projections de ce domaine sur les plans de coordonnées dans l'espace  $R^3$  ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) soient convexes. En conséquence des résultats précédents, la projection du domaine sur le plan ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) par exemple, est définie par les deux équations :

$$\sigma_1 - \sigma_2 - g(\sigma_1 + \sigma_2) \leq 0, \sigma_1 \geq \sigma_2$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 - g(\sigma_2 + \sigma_1) \leq 0, \sigma_2 \geq \sigma_1.$$

Il faut donc que la réunion des deux domaines soit un domaine convexe ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) ; c'est à dire que, dans le plan ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), les deux courbes symétriques par rapport à la première bissectrice, ayant pour équation :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| - g(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$$

doivent délimiter un domaine convexe.

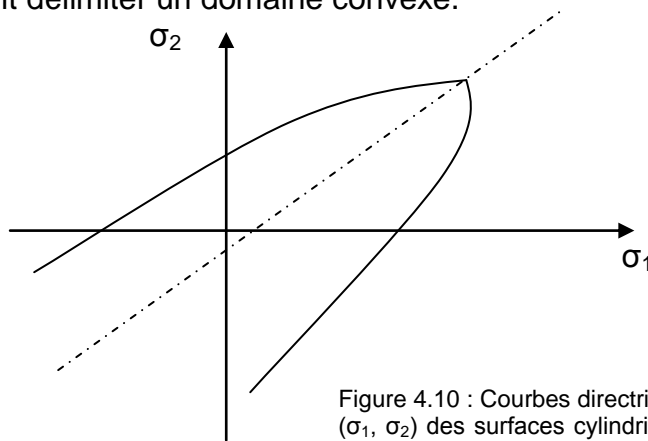


Figure 4.10 : Courbes directrices dans le plan ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) des surfaces cylindriques parallèles à l'axe  $\sigma_3$  constituant la frontière du domaine d'élasticité.

Cette condition est aussi suffisante pour que le domaine d'élasticité soit convexe car, si elle est satisfaite, le domaine d'élasticité, réunion des « onglets » précédemment définis, est aussi l'intersection des cylindres convexes, parallèles respectivement aux axes  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ , définis par :

$$|\sigma_2 - \sigma_3| - g(\sigma_2 + \sigma_3) \leq 0$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| - g(\sigma_1 + \sigma_3) \leq 0$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| - g(\sigma_1 + \sigma_2) \leq 0.$$

La fonction de charge se met sous la forme :

$$f(\sigma) = \sup_{i,j=1,2,3} \{ |\sigma_i - \sigma_j| - g(\sigma_i + \sigma_j) \}$$

#### IV.2.4.7 Critère de COULOMB

Le critère de COULOMB, souvent adopté pour les sols et pour les matériaux composés de grains dans la gamme des sollicitations courantes, est un critère de type courbe intrinsèque. L'angle de frottement interne  $\varphi$  avec l'axe  $\sigma$  est constant. La courbe intrinsèque se compose de deux droites inclinées à l'angle  $\varphi$  sur l'axe  $\sigma$  et d'ordonnée à l'origine  $c$ .  $c$  est la cohésion. On a la formule suivante :

$$f(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III})\sin\varphi - 2c \cos\varphi$$

Un matériau est dit pulvérulent si  $\phi \neq 0$  et  $c = 0$ . Il est dit purement cohérent si  $\phi = 0$  et  $c \neq 0$  (le critère est alors celui de Tresca).

#### **IV. 2. 5 Matériaux anisotropes**

Les critères présentés plus haut concernent les matériaux isotropes, ce qui conduit à d'importantes simplifications d'écriture. Le cas de l'anisotropie est plus complexe et il n'est guère possible d'établir la forme générale des critères concernant les matériaux anisotropes.

HILL (1950) pour rendre compte de l'anisotropie de certains métaux après un processus de formage, a proposé un critère indépendant de la contrainte moyenne, et qui se réduit au critère de VON MISES dans le cas de l'isotropie. Le matériau est supposé orthotrope (3 plans de symétrie matérielle orthogonaux entre eux) et le critère, écrit dans les axes d'orthotropie se met sous la forme :

$$f(\sigma) = \frac{1}{2} [ F (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 ] + L \sigma_{yz}^2 + M \sigma_{zx}^2 + N \sigma_{xy}^2 -$$

où les paramètres F, G, H, L, M, N (qui ont la dimension inverse du carré d'une pression), s'expriment en fonction des limites en traction et en compression respectivement selon les directions principales d'orthotropie.

Dans le cas de l'isotropie transverse (invariance par rotation quelconque autour d'un axe particulier), le critère de HILL ne fait plus intervenir que trois paramètres au lieu de six comme précédemment.

### **IV.3 Lois d'écoulement plastique et d'écrouissage**

#### **IV.3.1 Notion de loi d'écoulement**

La définition du comportement plastique se compose schématiquement de la réponse à deux questions :

- a) Quand y a-t-il déformation plastique ? c'est la notion de seuils, de domaines, de critères, objet du précédent paragraphe.
- b) Comment s'effectue la déformation plastique ? c'est la règle ou loi d'écoulement plastique.

#### **IV.3.2 Cas de la sollicitation uniaxiale**

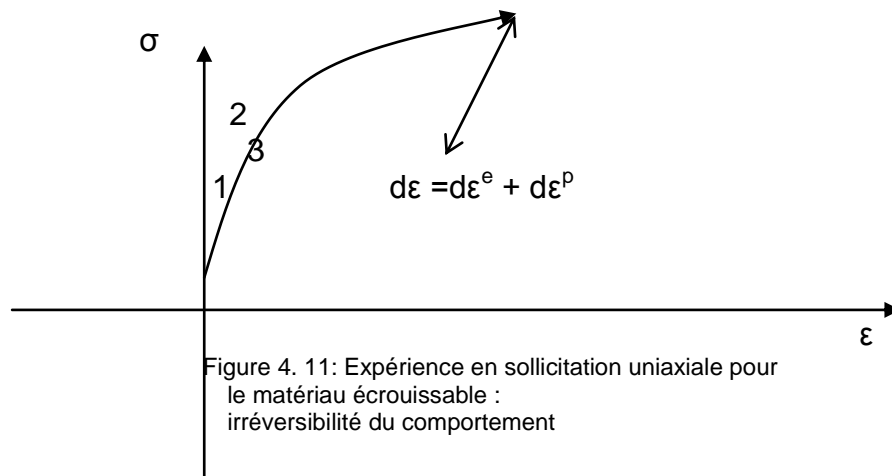
Reprenons le cas de l'expérience de traction simple pour le matériau écrouissable représenté à la figure 4.3.

Il est clair que dès que le seuil de plasticité initial a été franchi, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus correspondance biunivoque entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  : la donnée de  $\sigma$  ne suffit plus à définir  $\varepsilon$  et vice-versa.

Par contre connaissant  $\sigma$  et le trajet de charge suivi à partir de l'état initial, pour atteindre cette valeur, c'est à dire connaissant les valeurs de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , la donnée d'une variation de charge  $d\sigma$  suffit à définir la variation de déformation correspondante  $d\varepsilon$ .

On dit qu'on a affaire à une loi de comportement de type incrémentale. La courbe donnée sur la figure 9 étant unique, ce qui traduit l'indépendance du modèle de comportement étudié vis-à-vis du temps physique, la variation  $d\varepsilon$  ne dépend effectivement que de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ , et  $d\sigma$ .

On a donc, dans le schéma de comportement élastoplastique, les circonstances suivantes :



- ❖  $\sigma$  est inférieur au seuil de plasticité actuel : la variation de déformation est alors réversible donc purement élastique :  
 $d\varepsilon = d\varepsilon^e$  quel que soit le signe de  $d\sigma$
- ❖  $\sigma$  est au seuil de plasticité actuel et  $d\sigma$  est négatif, correspondant à une décharge (point 2 de la figure 4.11) : la variation de déformation est réversible donc purement élastique (une charge  $-d\sigma$  effectuée ramène la déformation à sa valeur antérieure) :  
 $d\varepsilon = d\varepsilon^e$  si  $d\sigma \leq 0$
- ❖  $\sigma$  est au seuil de plasticité actuel (point 2) et  $d\sigma$  est positif, correspondant à une charge ; la variation de déformation est alors décomposée comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible.  
 La partie réversible est la partie élastique, que l'on récupère en effectuant après la charge  $d\sigma$ , la décharge  $-d\sigma$  ; la partie irréversible est le complément pour obtenir la variation de charge totale :  
 $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$  si  $d\sigma \geq 0$

Le module d'élasticité  $E$  est défini dans chaque état  $(\sigma, \varepsilon)$  par :

$$E = d\sigma / d\varepsilon^e$$

Dans le cas où le point de charge est au seuil de plasticité actuel, on définit le « module tangent » par la relation :

$$E_t = d\sigma / d\varepsilon \quad d\sigma \geq 0$$

Le module d'écrouissage du matériau étant :

$$M = d\sigma / d\varepsilon^p \quad d\sigma \geq 0$$

On alors la relation évidente :

$$1 / E_t = 1 / E + 1 / M$$

$E_t$ ,  $E$  et  $M$  sont des grandeurs ayant la dimension d'une contrainte.

Pour le matériau parfaitement plastique, les résultats de l'expérience en sollicitation uniaxiale se représentent comme indiqué à la figure 4.12 ci-dessous :

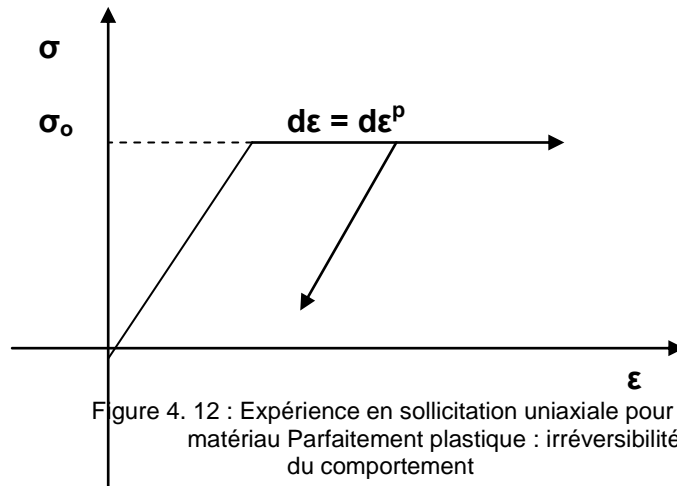


Figure 4. 12 : Expérience en sollicitation uniaxiale pour le matériau Parfaitement plastique : irréversibilité du comportement

- ❖ si  $\sigma$  est inférieur au seuil de plasticité  $\sigma_0$  la variation de déformation est purement élastique ; quel que soit  $d\sigma$  ;  $d\epsilon = d\epsilon^e$
- ❖ si  $\sigma$  est égal au seuil de plasticité  $\sigma_0$  et si  $d\sigma < 0$ , correspondant à une décharge : la variation de déformation est purement élastique :  $d\epsilon = d\epsilon^e$  si  $d\sigma < 0$
- ❖ si  $\sigma$  est égal au seuil de plasticité  $\sigma_0$  et si  $d\sigma = 0$  ; la variation de déformation est alors entièrement irréversible :  $d\epsilon = d\epsilon^p \geq 0$

La définition du module d'élasticité est évidemment inchangée. Par contre, le module tangent comme le module d'écrouissage sont égaux à zéro, et les notions correspondantes perdent tout intérêt.

#### IV.3.3 Cas de la sollicitation multiaxiale pour le matériau écrouissable

Dans le cas général de la sollicitation multiaxiale, le problème se pose de la même façon que précédemment, mais on doit désormais raisonner sur le point de charge représentant le tenseur  $\sigma$  dans l'espace  $R^6$ , et on doit se référer au domaine d'élasticité actuel et à sa frontière (voir figure 4.13) ;

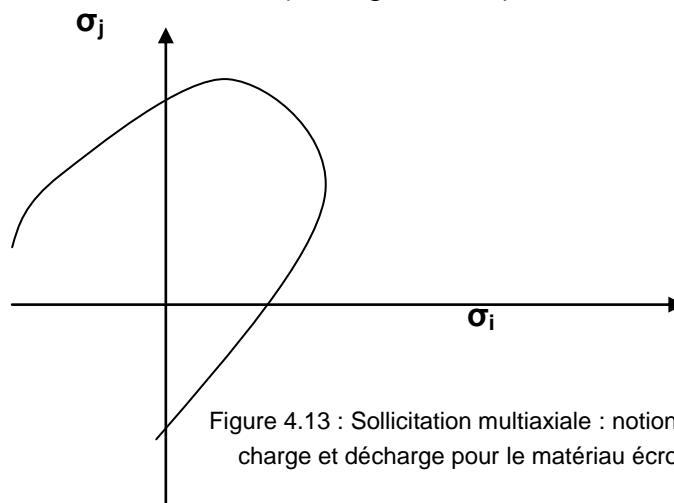


Figure 4.13 : Sollicitation multiaxiale : notion de charge et décharge pour le matériau écrouissable.



- ❖ si  $\sigma$  est intérieur au domaine d'élasticité actuel, si  $f(\sigma, E) < 0$  ; alors la variation de déformation est purement élastique :  
 $d\varepsilon = d\varepsilon^e$
- ❖ si  $\sigma$  est à la frontière du domaine d'élasticité actuel, on est conduit pour pouvoir décrire le comportement à définir les notions de charge et de décharge.

Dans le cas du matériau écrouissable, il y a charge lorsque le point de charge  $\sigma$  se trouvant à la frontière du domaine d'élasticité actuel, on donne une variation  $d\sigma$  dirigée vers l'extérieur de ce domaine.

En supposant que la frontière du domaine d'élasticité est régulière et en définissant celui-ci par une fonction de charge, comme indiqué précédemment, on pourra énoncer :

Il y a charge si :

$$f(\sigma, E) = 0$$

$$(\partial f / \partial \sigma)(\sigma, E) : d\sigma > 0$$

Il y a décharge si:

$$f(\sigma, E) = 0$$

$$(\partial f / \partial \sigma)(\sigma, E) : d\sigma < 0$$

En d'autres termes, ayant choisi les paramètres d'écrouissage et la manière dont ils interviennent dans la fonction de charge, il reste à déterminer leurs lois d'évolution ainsi que la loi d'écoulement plastique. En continuant d'adopter une partition de la déformation totale en déformation élastique et déformation plastique (ou tout au moins une partition des incréments :  $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$  ) et en tenant compte des remarques faites dans le cas uniaxial, on recherchera ces équations sous la forme :

$$d\varepsilon^p = A(\sigma, E_m) : d\sigma \text{ ou } d\varepsilon_{ij}^p = A_{ijkl}(\sigma_{pq}, E_m) d\sigma_{kl}$$

$$dE_m = K(\sigma, E_m) : d\sigma \text{ ou } dE_m = K_{mkl}(\sigma_{pq}, E_m) d\sigma_{kl}$$

lorsque l'on est en écoulement plastique, alors que l'on a  $d\varepsilon^p = 0$  et  $dE_m = 0$  en régime élastique.

Il convient donc de préciser les conditions d'écoulement plastique effectif. Comme l'on a déjà vu, une condition nécessaire est que l'on ait  $f(\sigma, E_m) = 0$ . Mais cette condition n'est pas suffisante : si à partir d'un point de la surface de charge (c'est à dire  $f(\sigma, E_m) = 0$ ), on impose une variation  $d\sigma$  tendant à revenir à l'intérieur du domaine d'élasticité, il n'y aura pas d'écoulement plastique. Ceci se produit, pour une surface régulière et de même sens que lui, lorsque l'on a  $\partial f / \partial \sigma : d\sigma < 0$ . La condition d'écoulement plastique en un point  $\sigma$  et pour un incrément  $d\sigma$  est donc double, soit :  $f(\sigma, E_m) = 0$  et  $\partial f / \partial \sigma : d\sigma > 0$  (charge plastique) : Il n'y a pas d'écoulement dans deux situations distinctes :

- soit  $f(\sigma, E_m) < 0$  quel que soit  $d\sigma$  (régime élastique)
- soit  $f(\sigma, E_m) = 0$  et  $\partial f / \partial \sigma : d\sigma < 0$  (décharge élastique)

Le cas où  $\partial f / \partial \sigma : d\sigma = 0$  correspondant à un chargement neutre (pas de nouveau écoulement plastique pour un matériau écrouissable).

La différentielle  $d_\sigma f = \partial f(\sigma, E) / \partial \sigma : d\sigma$  qui intervient dans ces conditions n'est qu'une différentielle partielle de  $f$ , lorsque les paramètres d'écrouissage sont fixés. Au cours de l'écoulement, la différentielle totale de  $f$  est nulle, puis que  $f$  garde une valeur nulle.

On a donc dans ce cas :

$$df = \partial f / \partial \sigma : d\sigma + (\partial f / \partial E_m) dE_m = 0$$

ce qui donne une condition de cohérence sur les lois d'évolution des paramètres d'érouissage, qui peut s'écrire :

$(\partial f / \partial \sigma_{kl} + \partial f / \partial E_m K_m) d\sigma_{kl} = 0$  quel que soit  $d\sigma_{kl}$ ,  $(\partial f / \partial \sigma_{kl}) d\sigma_{kl} \geq 0$  et  $f=0$  au cours de l'écoulement plastique.

Dans le cas de la plasticité parfaite, on a simplement, en cours d'écoulement :

$$\partial f / \partial \sigma : d\sigma = 0$$

On constate que la description complète de la plasticité nécessite simultanément trois catégories d'informations :

- la fonction de charge  $f(\sigma, E)$  ;
- la fonction d'écoulement  $A(\sigma, E)$  ;
- les fonctions d'érouissage  $K(\sigma, E)$ .

L'annulation simultanée de  $A_{ijkl} d\sigma_{kl}$ ,  $K_{mkl} d\sigma_{kl}$ , et  $\partial f / \partial \sigma_{kl} d\sigma_{kl}$  pour une infinité de valeur de  $d\sigma_{kl}$  implique alors nécessairement que  $\partial f / \partial \sigma_{kl}$  se factorise (du point de vue du produit tensoriel) dans  $A_{ijkl}$  comme dans  $K_{mkl}$ . D'où les formes beaucoup plus explicites de ces deux tenseurs qui s'écriront :

$$A_{ijkl} = h_{ij} \partial f / \partial \sigma_{kl}, K_{mkl} = k_m \partial f / \partial \sigma_{kl}$$

D'où les expressions valables seulement en cours d'écoulement :

$$D\varepsilon_{ij}^p = h_{ij}(\sigma_{pq}, E_m) \partial f / \partial \sigma_{kl} d\sigma_{kl} \text{ si } f(\sigma, E) = 0 \text{ et } \partial f / \partial \sigma_{kl} d\sigma_{kl} \geq 0$$

$$dE_m = k_m \partial f(\sigma_{pq}, E_m) \partial f / \partial \sigma_{kl} d\sigma_{kl}$$

La condition de cohérence s'écrit alors :

$$(1 + k_m \partial f / \partial E_m) \partial f / \partial \sigma_{kl} d\sigma_{kl} = 0 \quad \forall d\sigma_{kl}, \partial f / \partial \sigma_{kl} d\sigma_{kl} \geq 0$$

D'où plus simplement :

$$1 + k_m \partial f / \partial E_m = 0$$

Ainsi, les fonctions d'écoulement et d'érouissage ne nécessitent plus en sus de la fonction de charge  $f$  et de son gradient par rapport aux contraintes  $\partial f / \partial \sigma$ , que la connaissance d'une fonction tensorielle du second ordre, symétrique  $h_{ij}(\sigma, E)$  et d'une fonction d'érouissage  $k_m(\sigma, E)$  considérée ici aux fins d'illustration comme une fonction vectorielle.

#### IV.3.4 Loi de Prandtl-Reuss

C'est une loi d'écoulement en régime élastoplastique à érouissage isotrope. Elle est fondée sur les hypothèses suivantes :

- a) l'hypothèse d'incompressibilité plastique : la déformation plastique se fait à volume constant et l'écoulement ne dépend pas de la contrainte hydrostatique  $\sigma_H = 1/3 \text{ tr}(\sigma)$ . La fonction de charge ne dépend que du déviateur des contraintes et des variables internes :

$$\partial f / \partial \sigma_H = 0$$

- b) l'hypothèse d'isotropie initiale et d'érouissage isotrope : la fonction de charge ne dépend que des invariants  $J_2$  et  $J_3$  du déviateur des contraintes :

$$J_2(\sigma) = \sigma_{eq} = (3/2 \sigma' : \sigma')^{1/2}$$

$$J_3(\sigma) = (9/2 \sigma' : \sigma' : \sigma')^{1/3}$$

$\sigma'$  est le tenseur déviateur des contraintes :  $\sigma' = \sigma - 1/3 \sigma_H 1$

c) la plasticité associée et l'hypothèse de normalité sont adoptées

$d\varepsilon^p = d\lambda \partial f / \partial \sigma =$  déformation plastique cumulée

$dp = -d\lambda \partial f / \partial R$

d) le choix de la fonction de charge de Von Mises, indépendant du troisième invariant, sous la forme :

$f = \sigma_{eq} - R - \sigma_Y$  où  $\sigma_Y$  est la limite d'élasticité initiale en traction.

La loi de comportement ou la courbe d'écrouissage s'exprime par la relation :

$R = k(p) P \partial \psi / \partial p$  avec  $R(0) = k(0) = 0$  ;  $\psi$  est l'énergie libre spécifique.

En écrivant  $d\varepsilon^p = d\lambda \partial f / \partial \sigma = 3/2 d\lambda \sigma' / \sigma_{eq}$

$dp = -d\lambda \partial f / \partial R = d\lambda = (2/3 d\varepsilon^p : d\varepsilon^p)^{1/2}$ .

La condition de consistance lorsqu'il y a écoulement ( $df=0$  lorsque  $f=0$ ) donne :

$df = d\sigma_{eq} - k(p) dp = 0$  d'où l'on tire  $d\lambda = dp = H(f) d\sigma_{eq} / k'(p)$

Pour un matériau à écrouissage positif, c'est à dire  $k'(p) > 0$ , il n'y a écoulement que lorsque  $d\sigma_{eq}$  est positif, dans le cas contraire, on utilise la notation :

$\langle \rangle$

$d\lambda = dp = H(f) \langle d\sigma_{eq} \rangle / k(p)$  et la loi d'écoulement s'écrit :

$d\varepsilon^p = 3/2 H(f) \langle d\sigma_{eq} \rangle / k(p) \sigma' / \sigma_{eq}$  que l'on peut encore écrire en ne faisant intervenir que les contraintes avec :

$p = k^{-1}(R) = k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_Y)$  et  $g'(\sigma_{eq}) = [k'(k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_Y))]^{-1}$

En tenant compte de la partition des déformations et de la loi d'élasticité isotrope la loi de Prandtl-Reuss s'écrit :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$d\varepsilon^e = ((1+\nu)/E) d\sigma - (\nu/E) d(\text{tr}(\sigma)) 1$$

$$d\varepsilon^p = 3/2 H(f) g'(\sigma_{eq}) \langle d\sigma_{eq} \rangle / \sigma_{eq} \sigma'$$

## IV.4 Principe du travail plastique maximal

### IV.4.1 Enoncé

Le principe du travail plastique maximal a été énoncé par HILL (1950).

Soit pour un élément, un tenseur contrainte  $\sigma$  non extérieur au domaine d'élasticité actuel :

$\sigma \in C(E) (\Leftrightarrow f(\sigma, E) < 0)$

soit  $d\varepsilon^p$  une vitesse de déformation plastique correspondant au taux de contrainte  $d\sigma$  effectué dans l'état  $(\sigma, E)$  ;

soit  $\sigma^*$  un autre tenseur contrainte non extérieur à  $C(E)$  :

$\sigma^* \in C(E) (\Leftrightarrow f(\sigma^*, E) \leq 0)$

alors on a :

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p \geq 0$$

#### IV.4.2 Conséquence pour la loi d'écoulement plastique

- Supposons d'abord  $\sigma$  intérieur au domaine d'élasticité actuel :  $f(\sigma, E) < 0$

Dans ce cas le tenseur symétrique  $(\sigma - \sigma^*)$  qui intervient dans la formule précédente peut avoir une orientation quelconque. Il résulte alors immédiatement de cette formule que le tenseur  $d\varepsilon^p$  est nul :

$$d\varepsilon^p = 0$$

Ainsi le principe du travail plastique maximal impose que la vitesse de déformation plastique est nulle lorsque  $\sigma$  est intérieur à  $C(E)$  ; ceci est bien en accord avec la définition même du domaine d'élasticité actuel.

- Supposons maintenant  $\sigma$  à la frontière du domaine d'élasticité actuel :  $f(\sigma, E) = 0$

On sait qu'il existe alors des taux de contraintes  $d\sigma$  qui induisent des  $d\varepsilon^p \neq 0$  et l'on doit chercher les conséquences de la formule précédente dans ce cas :

L'orientation du tenseur  $(\sigma^* - \sigma)$  est limitée. En particulier toutes les orientations aux cônes des tangentes en  $\sigma$  à la frontière d'élasticité sont possibles : il s'en suit par la formule ci-dessus que  $d\varepsilon^p$  doit être normale extérieure en  $\sigma$  à la frontière d'élasticité.

Ceci impose à  $d\varepsilon^p$  une direction unique en chaque point régulier de la frontière de  $C(E)$ . Cette dernière étant composée de nappes qui se rejoignent le long de lignes de points singuliers, on en déduit la convexité de  $C(E)$  : en effet  $\sigma^*$  étant quelconque dans  $C(E)$ , il résulte de la formule précédente que chaque nappe régulière de la frontière de  $C(E)$  doit demeurer d'un même côté de son plan tangent au point courant ; cette nappe est donc convexe ; en se plaçant ensuite en un point singulier, la même condition permet de montrer que le cône des tangentes doit y être convexe.  $C(E)$  doit être convexe et les directions du cône des normales extérieures sont donc permises pour  $d\varepsilon^p$ .

Le principe du travail plastique maximal :

- impose la convexité des domaines d'élasticité ;
- permet de préciser la loi d'écoulement.

En effet, compte tenu des conditions imposées lors du choix de la fonction de charge  $f$  et de la symétrie de l'expression de  $f$  par rapport aux composantes  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{ji}$ , on peut écrire :

En un point régulier de la frontière d'élasticité :

$$d\varepsilon^p = \lambda \partial f / \partial \sigma \quad \lambda \geq 0$$

En un point singulier de la frontière d'élasticité :

$$d\varepsilon^p = \lambda \partial f \quad \lambda \geq 0$$

#### IV.4.3 Définitions

On dit qu'un matériau élastoplastique est standard si sa fonction de charge étant convexe, la loi d'écoulement plastique s'en déduit par la règle de normalité.

##### IV.4.3.1 Règle de normalité

Choisissons  $\sigma^*$  infiniment proche de  $\sigma$  et, comme lui, à la limite de l'écoulement : l'hypervecteur incrémental (dans l'espace des contraintes  $(\sigma - \sigma^*)$ ) est donc tangent à la surface de charge en  $\sigma$ , ou normal au gradient, en  $\sigma$ , de la fonction de charge  $\partial f / \partial \sigma$ .

On a donc :  $(\partial f / \partial \sigma) : (\sigma - \sigma^*) = 0$

L'inégalité du travail plastique maximal donne tout aussi bien, en intervertissant les rôles de  $\sigma$  et  $\sigma^*$  :

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p \geq 0 \text{ et } (\sigma^* - \sigma) : d\varepsilon^p \geq 0$$

Donc

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p = 0 \vee \sigma^*, (\partial f / \partial \sigma) : (\sigma - \sigma^*) = 0$$

Il s'ensuit que  $d\varepsilon^p$  est colinéaire à  $\partial f / \partial \sigma$  et, donc s'il est représenté dans le même espace (avec des échelles arbitraires), normal comme lui à la surface de charge, on écrira :

$$d\varepsilon^p = (\partial f / \partial \sigma) d\lambda$$

Le scalaire incrémental  $d\lambda$  est, par ailleurs, positif. En effet, si nous choisissons maintenant  $\sigma^*$  intérieur au domaine élastique, tel que  $(\sigma - \sigma^*)$  soit colinéaire à  $\partial f / \partial \sigma$  et de même sens que lui, nous trouvons :

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p \geq 0$$

Donc  $d\varepsilon^p$  est de même sens que  $\partial f / \partial \sigma$  (celui de la normale, extérieur à la surface charge) et  $d\lambda$  est positif.

La normalité de l'écoulement découle donc de la normalité de  $d\varepsilon^p$  à la surface de charge : la fonction de charge joue le rôle d'un potentiel plastique et détermine, à un scalaire multiplicatif près, l'écoulement plastique incrémental.

#### IV.4.3.2 Règle de convexité

Considérons  $\sigma^*$  intérieur au domaine d'élasticité. La combinaison de l'inégalité du travail plastique maximal et de sa conséquence, la règle de normalité (avec  $d\lambda \geq 0$ ) implique :

$$(\sigma - \sigma^*) : \partial f / \partial \sigma \geq 0 \vee \sigma^*, f(\sigma^*) \leq 0$$

Cela signifie que la surface de charge doit être située toute entière d'un même côté par rapport à chacun de ses plans tangents. Elle doit être convexe, de même que la fonction de charge : c'est la règle de convexité.

#### IV.4.4 Dissipation plastique

La dissipation plastique par unité volume est, par définition, le scalaire :

$D = \sigma : d\varepsilon^p$  ;  $D$  est une fonction de  $\sigma$  et de  $d\varepsilon^p$ . Dans l'hypothèse du travail plastique maximal, la dissipation plastique n'est une fonction que de  $d\varepsilon^p$  et de  $E$ . Autrement dit, dans un état d'érouissage donné, la dissipation plastique est une fonction univoque de  $d\varepsilon^p$  qui s'exprime par :

$$D(E, d\varepsilon^p) = \text{Max}_{\sigma^*} \{ \sigma^* : d\varepsilon^p / \sigma^* \in C(E) \}$$

Ce résultat découle immédiatement de la formule du travail plastique maximal donnée plus haut. Il faut souligner que la dissipation n'est définie que sur les tenseurs symétriques qui sont effectivement des vitesses de déformations plastiques pour le matériau standard.

#### IV.4.5 Matériaux de Von Mises et Tresca

##### IV.4.5.1 Matériau de Von Mises

Il s'agit du matériau standard dont la fonction de charge est celle Von Mises.

Pour le matériau à écrouissage isotrope de Taylor, on a la loi d'écoulement suivante :

$$d\epsilon^p = (1/M(s,E)) (\text{tr}(s \cdot s))/4k^2(E) \quad \text{si } \frac{1}{2} \text{tr} s^2 = k^2(E)$$

$$\text{et } \text{tr}(s \cdot s) \geq 0$$

$$d\epsilon^p = 0 \text{ sinon.}$$

En reportant cette expression de  $d\epsilon^p$  dans la formule :

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p = A : d\sigma + d\epsilon^p$$

où A est un tenseur,

et en utilisant la loi de comportement du matériau élastique isotrope, on obtient les relations dites de Prandtl Reuss :

$$d\epsilon = (1+\nu)\sigma/E - \nu/E (\text{tr} \sigma) 1 + d\epsilon^p$$

La dissipation plastique pour le matériau de Von Mises à écrouissage isotrope est:

$$D(E, d\epsilon^p) = k(E) \sqrt{2\text{tr} [(d\epsilon^p)^2]}$$

Pour le matériau de Von Mises parfaitement plastique

$$d\epsilon^p = \lambda s \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si } \frac{1}{2} \text{tr} s^2 = k^2$$

$$d\epsilon^p = 0 \text{ sinon} \quad \text{et } \text{tr}(s \cdot s) = 0$$

$$D(d\epsilon^p) = k \sqrt{2\text{tr} [(d\epsilon^p)^2]}$$

##### IV.4.5.1 Matériau de Tresca

Il s'agit du matériau standard dont la fonction de charge est celle de Tresca. Ce matériau est donc l'homologue du matériau de Von Mises, mais il présente la particularité, due aux singularités de la frontière d'élasticité, que l'on doit distinguer plusieurs régimes d'écoulement plastique, suivant la situation du point de charge sur celle-ci.

Le régime de face : il se produit en les points réguliers de la frontière. Soit par exemple la face :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0; \text{ où les } \sigma_i \text{ désignent les contraintes principales.}$$

Pour le matériau à écrouissage isotrope

$$d\epsilon^p_1 = (1/M(s,E)) (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$d\epsilon^p_2 = 0$$

$$d\epsilon^p_3 = - (1/M(s,E)) (\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0(E);$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \geq 0$$

Pour le matériau parfaitement plastique

$$d\epsilon^p_1 = \lambda$$

$$d\epsilon^p_2 = 0$$

$$d\epsilon^p_3 = -\lambda \quad \text{si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \sigma_1 - \sigma_3 = 0; \sigma_1 - \sigma_3 \geq 0$$

Le régime d'arête : il se produit en les points singuliers de la frontière.

Soit par exemple  $\sigma$  vérifiant :  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3; \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$ .

Le repère principal de  $d\varepsilon^p$  doit être principal pour  $\sigma$  et :  
Pour le matériau à écrouissage isotrope :

$$\begin{aligned}d\varepsilon^p_1 &= (1/ M (s,E)) \sup(\sigma_1 - \sigma_i / i=2,3) \\d\varepsilon^p_2 &= (\alpha/ M(s,E) ) \sup (\sigma_1 - \sigma_i) / i = 2,3 \\d\varepsilon^p_3 &= (\beta/ M(s,E)) \sup (\sigma_1 - \sigma_i) / i= 2,3 \\ \alpha + \beta &= -1, \quad \alpha\beta \geq 0\end{aligned}$$

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \quad ; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 \\ (\sup(\sigma_1 - \sigma_i) / i=2,3) \geq 0$$

Pour le matériau parfaitement plastique :

$$\begin{aligned}d\varepsilon^p_1 &= \lambda + \mu \\d\varepsilon^p_2 &= -\lambda \\d\varepsilon^p_3 &= -\mu\end{aligned} \quad \text{si } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \quad ; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 \\ (\sup(\sigma_1 - \sigma_i) / i=2,3) = 0$$

On remarque pour le matériau de Von Mises comme pour le matériau de Tresca, la règle ou loi d'écoulement plastique conduit à la propriété :

$$\text{tr } d\varepsilon^p = 0$$

#### ***IV.4.6 Validité du principe du travail plastique maximal***

Le principe du travail plastique maximal est en général admis pour les métaux (et autres matériaux dont le critère de plasticité est indépendant de la contrainte moyenne).

## IV. APPLICATIONS

Exercice n°1 :

### A. Déformation d'une tige

Les objets minces sont d'une grande utilité tant qu'ils conservent leur forme. Malheureusement, au-delà d'une compression seuil, ils flambent : ils se déforment fortement, transformant l'énergie de compression en énergie de flexion.

La tige ci-dessous est localement courbée sur un rayon  $R$  au prix d'un moment  $M = EI/R$  où  $E$  est le module de Young, et  $I$  le moment d'inertie de la section (par exemple, pour une tige pleine à section circulaire de rayon  $r$ ,  $I = r^4 \pi/4$ ).



1°) Donner, à un coefficient multiplicatif  $k$  près, l'ordre de grandeur de la force horizontale  $FC$  capable de défléchir une tige de longueur  $L$  dans cette configuration (encastrée - libre).

2°) En établissant un bilan mécanique local démontrer l'équation d'équilibre approchée de la tige :

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + F \frac{dy}{dx} = 0$$

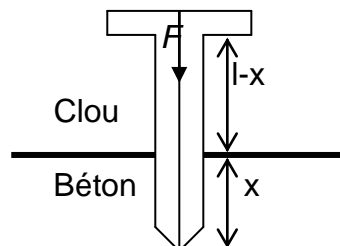
Quelles sont les conditions aux limites imposées ? Montrer alors l'existence d'un seuil de flambage  $FC$  et donner sa valeur. Comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

3°) Donner l'ordre de grandeur du seuil de flambage d'une tige verticale pleine à section circulaire (longueur  $L$ , masse volumique  $\rho$ , diamètre  $\emptyset$ ) sous son propre poids.

### B. Déformation d'un clou

Il est bien connu qu'enfoncer un clou dans un matériau dur est une opération difficile qui se traduit souvent par le fait que le clou plie au lieu de continuer à s'enfoncer. On cherche à planter un clou de longueur  $l$ , de rayon  $R$  en acier de module d'Young  $E_a=200$  GPa et de résistance limite à la traction  $\sigma_a=1,2$  GPa dans un béton armé de module d'Young  $E_b=45$  GPa et de résistance limite à la compression  $\sigma_b =400$  MPa. On notera  $\mu=0,5$  le coefficient de frottement acier- béton.

1°) Quelles sont les conditions aux limites imposées ? Montrer alors l'existence d'un seuil de flambage  $FC$  et donner sa valeur. Comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.





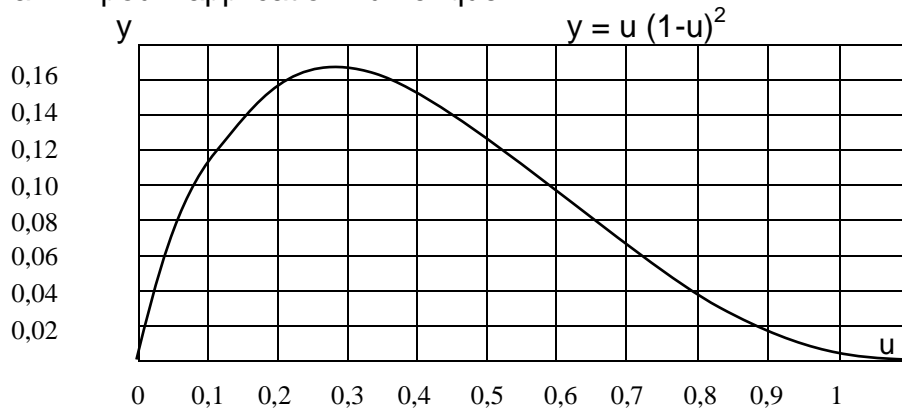
2°) En admettant que le pouvoir perforant du clou soit suffisant pour faire un trou dans le béton, établir l'expression reliant la force  $F$  nécessaire pour enfoncer le clou à la profondeur de pénétration  $x$ .

3°) En vous appuyant sur les résultats précédents démontrer que la condition de non flambement s'écrit :

$$x/l(1-x/l)^2 < k/8 E_a/\sigma_b (R/l)^3$$

En déduire le rapport  $R/l$  minimum pour que le clou béton ne se plie pas lors de son enfoncement.

4°) Un clou de diamètre 2 mm et de longueur 16 mm pliera-t-il avant enfoncement complet ? Si non, à partir de quelle valeur d'enfoncement interviendra la pliure ? On prendra  $k=4$  pour l'application numérique.



## Exercice 2

On veut caractériser les contraintes d'origine thermique dans un barrage en béton. On ne considère pas pour le moment les contraintes dues à la pression de l'eau retenue, qui peuvent être prises en compte par superposition. On vérifiera en fin de compte que les valeurs correspondantes sont faibles devant les contraintes thermomécaniques.

On étudie le barrage en béton de la figure ci-dessous, d'épaisseur  $e$  selon  $x_1$ , "infini" selon  $x_2$ , "long" selon  $x_3$ , (hauteur  $h$ ). La température lors de la fabrication est uniforme  $T = T_0$ , et elle évolue ensuite, pour prendre une valeur  $T_1$  en  $x_1 = 0$  et  $T_2$  en  $x_1 = e$  avec un profil que l'on supposera linéaire.

1. Prévoir sans calcul la forme des tenseurs de contraintes et de déformations, ainsi que les directions principales.
2. Ecrire les relations de Hooke donnant  $\sigma_{ij}$  en fonction de  $\epsilon_{kl}$ , en prenant en compte une dilatation thermique isotrope en chaque point du solide,  $\epsilon_{th} = \alpha(T-T_0)$ , en utilisant  $E$  et  $\nu$ .
3. A l'aide des équations d'équilibre et des conditions aux limites en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = e$ , trouver  $\sigma_{11}$ .
4. En écrivant la résultante des efforts sur une section courante du barrage de normale  $x_3$ , trouver  $\sigma_{33}$ . Calculer la valeur maximale de  $\sigma_{33}$ .
5. Calculer  $\sigma_{22}$ .

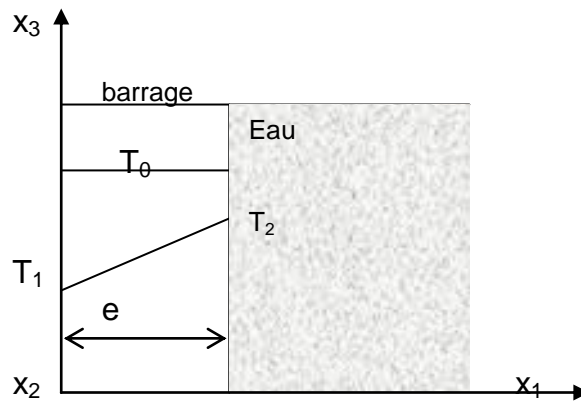
**Application numérique :**

- module d'Young :  $E = 40\,000\text{ MPa}$  ; coefficient de Poisson :  $\nu = 0,20$
- coefficient de dilatation thermique :  $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
- température au moment de la construction :  $T_0 = 20^\circ\text{C}$
- température côté air :  $T_1 = -40^\circ\text{C}$  ;  $T'_1 = 20^\circ\text{C}$
- température côté eau :  $T_2 = 0^\circ\text{C}$

**On utilisera :**

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

$$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$



**Exercice n° 3**

On considère un tube mince de section circulaire, de rayon  $r$  et d'épaisseur  $e$ , chargé en pression interne  $P$ . Le matériau est supposé parfaitement plastique, de limite d'élasticité  $\sigma_y$ . On demande de définir la pression  $P_e$  à laquelle la plasticité débute et de donner à ce moment la direction de la vitesse de déformation plastique. On étudiera pour le critère de Tresca et le critère de von Mises les 3 cas suivants :

- a. Le tube est libre dans la direction  $z$ .
- b. Le déplacement est bloqué dans la direction  $z$ .
- c. Le tube est fermé (réservoir).

**Exercice n°4 :**

On considère une enveloppe sphérique, homogène, de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ . Le matériau qui la constitue est élastique parfaitement plastique, à élasticité linéaire isotrope, ayant pour critère de plasticité le critère de Von Mises ou celui de Tresca.

Partant de l'état initial naturel, on soumet cette sphère à une pression intérieure normale uniforme  $p$  que l'on fait croître à partir de 0.

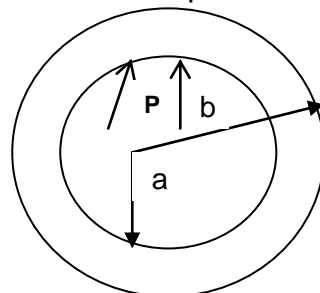


Fig. 1 : Géométrie et chargement appliqué à la sphère sous pression

## 1 Analyse élastique

1.1. Donner la solution (champs des contraintes et des déplacements) en élasticité.

1.2. Déterminer la charge limite d'élasticité  $P_e$  de la sphère sous pression pour les critères de Von Mises et Tresca.

## 2 Analyse élasto-plastique

2.1. Donner la solution (champs des contraintes et des déplacements) en élasto-plasticité. Vérifier que la zone plastique se développe à partir de la face interne de la sphère creuse (Fig.2).

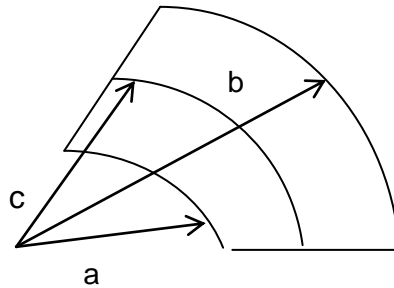


Fig. 2 : Progression de la zone plastique à partir de la surface intérieure

Donner la relation entre le rayon de la zone plastique  $c$  et la pression  $p$ . Déterminer la pression limite conduisant à la rupture par déformation excessive,  $P_p$ .

2.2. Déterminer les déformations plastiques et leurs vitesses.

## **BIBLIOGRAPHIE :**

- LEMAITRE J. et CHABOCHE J.L., Mécanique des matériaux solides, Dunod – Paris 1985
- FRANCOIS D. PINEAU A., ZAOUI A. Comportement mécanique des matériaux, Hermès, Paris 1995
- GERMAIN P. MULLER P., Introduction à la mécanique des milieux continus, Masson 1980
- CHARMET J.C., Mécanique du solide et des matériaux, Elasticité- Plasticité- Rupture
- J. SALENCON, De l'élastoplasticité au calcul à la rupture, les éditions de l'Ecole Polytechnique, avril 2002, Direction des études